И. Н. Кавун

НАЧАЛЬНЫЙ КУРС ГЕОМЕТРИИ

ДЛЯ ШКОЛ I-й СТУПЕНИ
В ДВУХ ЧАСТЯХ

Часть II

Гос. Учен. Сов. допущен в качестве учебника для единой трудовой школы
(протокол заседания Научно-Педаг. Секции Гос. Уч. Сов. от 20/X 22 г.)

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
1923.

Гиз № 4948. Тираж 25.000.

Типография «Сеятель» Е. В. Высоцкого, Пгр., Вознесенск. пр., 53.

Предисловие ко второй части.

В обращении „К Учителю“ в первой части „Начальн. Курса Геометрии“ изложены дидактические мысли, которыми руководился автор при составлении „Курса“. Эти мысли положены в основу и второй части. Поэтому мы отсылаем преподавателя, который будет пользоваться второй частью, к упомянутому обращению.

Здесь же считаем нужным сказать несколько слов о геометрическом материале второй части. На выбор этого материала неблагоприятно влияло то, что ступени единой школы до последнего врѐмени не вполне определились, Не вполне определилось и время, которое может быть уделено преподаванию геометрии в школе первой ступени. Вот почему во вторую часть помещено материала несколько больше того, который может быть проработан в классе Д, и преподавателю предоставляется возможность ограничения или расширения его в зависимости от времени, которым он располагает.

Считаем не лишним перечислить здесь те вопросы, которые могли бы быть пройдены в классе Д в первую очередь. Вот эти вопросы:

Измерение углов.

Равенство и подобие треугольников.

Понятие о приближенном числе.
Сумма углов треугольника.
Равнобедренный и равносторонний треугольники.
Равенство и подобие многоугольников.
Площади прямолинейных фигур.
Параллелограммы (с сокращениями).
Правильный многоугольник (с сокращениями).
Длина окружности и площадь круга.
Объем призмы и цилиндра.

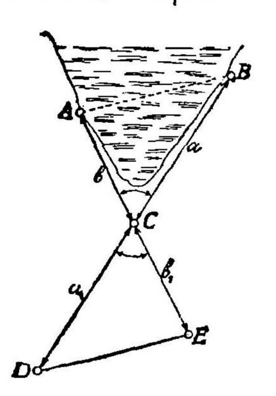
Опечатка: *На стр. 52, строка 2 снизу, вместо* [illegible]$/_5$ *читать* $^3/_4$.

ГЛАВА I.

Треугольник, равенство и подобие треугольников.

1. Измерение углов.

Две точки A и B (черт. 1) отделяются непроходимым местом. Напр., они могут оказаться на противоположных берегах пруда или на вершинах двух гор; одна из них может лежать на поверхности земли, другая на верхушке высокой башни; наконец, одна из них может быть на Земле, другая на Луне. Как измерить расстояние AB между ними?



Черт. 1. AB—недоступное расстояние.

Это делается так: отмечают треугольник ABC (черт. 1), у которого прямая AB служит стороной; и затем этот треугольник переносят с одного места на другое и именно на такое место, на котором расстояние AB легко измерить. Как же это сделать? Чтобы решить эту задачу, надо прежде всего научиться измерять углы.

Прямой угол—мера углов. 1. Прямой угол всем хорошо известен. Все прямые углы равны между собою. Поэтому для измерения углов лучше всего принять за меру прямой угол. Но эта мера слишком крупная, и ею было бы так же неудобно измерять углы, как неудобно было бы, напр., измерять все расстояния одной только саженью. Поэтому за единицу угла надо взять какую-нибудь часть прямого угла.

Задача 1. Разделить прямой угол, вырезанный из бумаги, на 16 равных частей и измерить шестнадцатой долей прямого угла несколько данных углов, также вырезанных из бумаги.

2. Единицей или мерой угла считают $^1/_{90}$-ую часть прямого угла, которую называют **угловым градусом**. На черт. 3

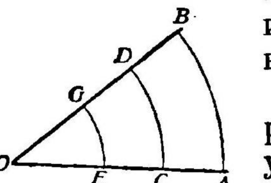
прямой угол *AOB* разделен на 18 равных частей, и одна восемнадцатая его часть *AOC* разделена на 5 равных уголков. Каждый из этих уголков есть угловой градус.

Угол *AOD* содержит 35 градусов, что записывается так: $\angle AOD = 35^0$.

Задачи. 2. Вырежьте из бумаги несколько острых углов и измерьте их, накладывая на прямой угол *AOB* (черт. 3).

3. Вырежьте из бумаги тупой угол и измерьте его, пользуясь черт. 3.

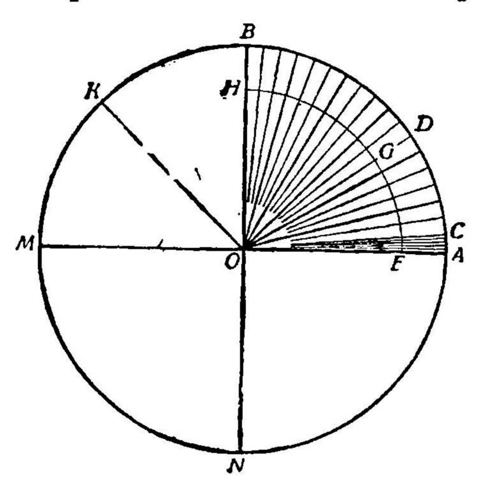
Измерение угла по дуге. 1. Между сторонами угла *AOB* (черт. 2) проведены дуги *AB*, *CD* и *EG*. Их центры в точке *O*. Эти дуги называются дугами угла *AOB*.



Черт. 2. Угол *AOB*. Его дуги *AB*, *CD* и *EG*.

Угол *AOB* (черт. 3) разделен на 18 равных частей, т. е. на 18 равных углов. Дуга *AB* разделилась на 18 равных частей, 18 равных дуг. Если бы мы разделили прямой угол *AOB* на 90 равных частей, то и дуга его *AB* разделилась бы на 90 равных между собою дуг. Каждая такая дуга называется дуговым градусом. Прямой угол содержит 90 угловых градусов; дуга прямого угла — 90 дуговых градусов. Угол *AOD* содержит 35 угловых градусов, а дуги его *AD* и *EG*—по 35 дуговых градусов. Значит:

Сколько градусов в угле, столько же их и в его дуге.



Черт. 3. Прямой угол *AOB* разделен на углы, из которых каждый равен 5°. Угол *AOC* разделен на угловые градусы.

2. На черт. 3 изображена окружность *ABMNA*, которая двумя перпендикулярными диаметрами *AM* и *BN* разделена на 4 равные части. Часть ее *AB* содержит 90 дуговых градусов;

значит, вся окружность заключает 360 дуговых градусов. Один дуговой градус есть $^1/_{360}$ окружности.

Задачи. 4. Сколько градусов в дуге *AC* (черт. 3)? Покажите, начиная от точки *A*, дугу в 30°! в 45°! Покажите, начиная от точки *E*, дугу в 30°! в 45°!

5. Равны ли градусы дуги *EH* градусам дуги *AB*?

6. Сколько градусов в прямом угле? Как вы назовете угол, меньший 90°? Больший 90° и меньший 180°? Как назовете угол 89°? 91°? 179°?

7. Дуга угла имеет 30 дуговых градусов. Сколько угловых градусов заключает этот угол?

8. На сколько градусов повернется часовая стрелка от полдня до 3 час.? до 5 час.? Сколько градусов сделает по окружности ее конец за 3 часа? за 5 час.?

9. Какой угол описывает минутная стрелка в 5 мин.? в 30 мин.?

10. Какой угол составляют часовая и минутная стрелки в 3 ч. 45 мин.? в 8 ч. 45 мин.?

11. Какую часть окружности составляет ее дуга в 90°? в 18°? в 45°?

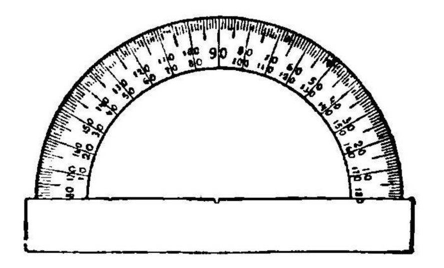
3. В одном градусе содержится 60 минут. Угол в 30 минут обозначается 30′.

Задачи.

Сложить:	Вычесть:
12. 5°7′ + 28°27′	**17.** 35°47′ — 27°12′
13. 37°54′ + 6′	**18.** 44° — 25°17′
14. 23°37′ + 48′	**19.** 24°13′ — 13°23′
15. 44°53′ + 20°40′	**20.** 45°14′ — 14°29′
16. 27°48′ + 25°42′	

Транспортир. Транспортир — это полукруг, изображенный на черт. 4. Центр его дуги отмечен зазубринкой. Дуга его разделена на 180°.

Служит транспортир для измерения углов, которое выполняется таким образом. Он накладывается на угол так, чтобы центр его дуги пришелся у самой вершины угла, а диаметр полукруга совпал с одной из сторон угла Тогда смотрят, против какого деления транспортира приходится другая сторона

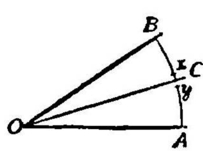


Черт. 4. Транспортир.

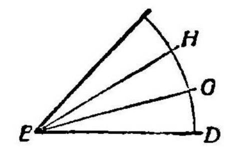
угла. Таким образом по транспортиру мы отсчитываем число дуговых градусов, заключающихся в дуге угла. Пусть дуга угла содержит 35^0. Тогда и сам угол будет заключать 35 угловых градусов.

Изготовление транспортира. 1. Приготовить транспортир не очень трудно. Надо научиться делить дуги на равные части.

Разделим дугу *AB* угла *AOB* (черт. 5) пополам. Примем точку *x* на-глаз за середину дуги *AB*. Раздвинув острия циркуля на расстояние *Ax*, поставим одно из них в точку *B*, а другим отметим точку *y*. Если точки *x* и *y* не совпадут, то найдем на глаз середину маленькой дуги *xy*. Она будет серединой дуги *AB*. Если соединим ее с вершиной угла *O*, то он разделится прямой *OC* пополам.



Черт. 5. Угол и его дуга разделены пополам.



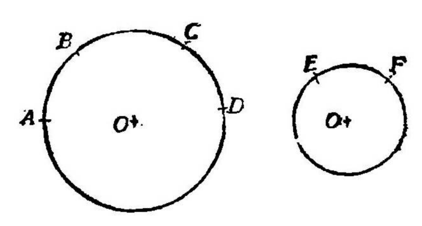
Черт. 6. Угол и его дуга разделены на три равные части.

2. Разделим еще дугу *DF* (черт. 6) на 3 равные части. Разделим ее сперва на-глаз на 3 равные части. Затем будем исправлять неточности этого деления с помощью циркуля. И если мы добьемся путем проб такого растворения циркуля, что его острия придутся на дуге *DF* сперва в точках *D* и *G*, затем в точках *G* и *H* и, наконец, в точках *H* и *F* то дуги *DG*, *GH* и *HF* будут равны.

Соединив точки *G* и *H* с вершиной *E*, мы разделим угол *DEF* на три равные части.

Задача. 21. Растворив циркуль, отметим на окружностях (черт. 7) его остриями концы дуг *AB*, *CD* и *EF*, не меняя при этом его растворения. Равны ли дуги *AB* и *CD*? *AB* и *EF*?

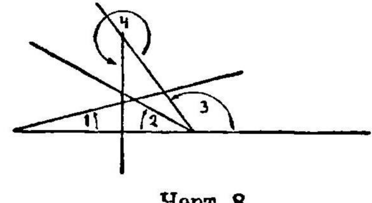
Можно ли отложить дугу *AB* на окружности, имеющей иной радиус, иначе говоря, иную кривизну, чем дуга *AB*?



Черт. 7. Расстояние между точками *A* и *B*, *C* и *D*, *E* и *F* равны. Совместимы ли дуги *AB* и *CD*? *AB* и *EF*?

3. Чтобы приготовить транспортир (черт. 4), начертим 4 полуокружности, имеющие общий центр, радиусами

7 см., $6^1/_2$ см., 6 см. и 5 см. Разделим первую из этих дуг на две равные части—сперва на-глаз, а затем сделаем исправление с помощью циркуля. Так же делим каждую половину ее еще пополам: получим четверти дуги. Каждую четверть дуги разделим на 3 равные части; дуга разделится на 12 равных частей. Из них каждую мы разделим на 3 равные части. Получим 36 частей, содержащих по 5°. На градусы делим полуокружность на глаз, не проверяя их циркулем. Деления проводим тонко очиненным карандашем по линейке, которую располагаем так, чтобы ее ребро проходило каждый раз чрез центр дуги транспортира. Градусные деления наносим между первой и второй полуокружностью, пятки их отмечаем между второй и третьей полуокружностью и десятки—между третьей и четвертой. При внимании и аккуратности можно изготовить транспортир, который будет точнее дешевых покупных транспортиров.



Черт. 8.

Задачи. 22. Измерить транспортиром углы (черт. 8) 1, 2 и 3! Измерить углы вашего чертежного треугольника!

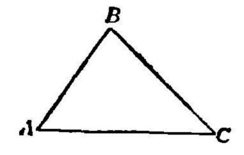
23. Начертить углы в 30°! 45°! 60°! 90°! 120°! 150°!

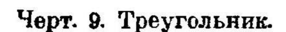
24. Начертить углы в 1°! 89°! 91°! 179°! Какие из этих углов острые? какие тупые?

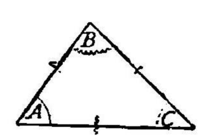
25. Начертить от руки углы 30°! 45°! 60°! 90°! 120°! и сделать поверку их транспортиром.

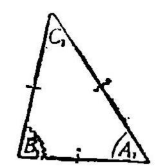
2. Равенство и подобие треугольников.

Расположение углов и сторон треугольника. Треугольник ABC составлен тремя прямыми линиями AB, BC и




Черт. 9. Треугольник.





Черт. 10. Равные треугольники.

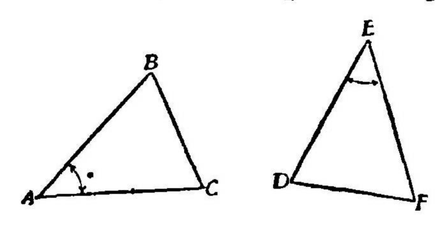
AC (черт. 9). Они образуют три угла A, B и C. Сторона AC называется основанием треугольника; стороны AB и

BC называются боковыми: AB—левая боковая сторона, BC—правая боковая. К каждой стороне прилегают два угла; каждые две стороны заключают один угол. Против каждой стороны лежит угол, который называется противолежащим ей углом.

Равные треугольники. Вырежем из бумаги два равных треугольника, т. е. два таких треугольника, которые можно совместить друг с другом (черт. 10). Отметим вершины совмещающихся углов одинаковыми буквами A и A_1, B и B_1, C и C_1.

При совмещении треугольников сторона AB сливается со стороной A_1B_1, сторона BC со стороной B_1C_1 и AC с A_1C_1.

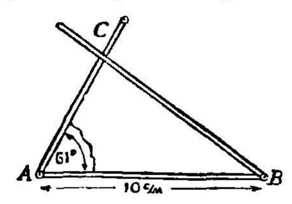
Отметим равные углы C и C_1 точечной дугой; противолежащие им равные стороны AB и A_1B_1 — точечной черточкой. Равные углы A и A_1 отмечены сплошной дугой, а стороны BC и B_1C_1—сплошными черточками, и т. д. Мы видим, что в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, против равных сторон лежат равные углы. Треугольники, которые не могут быть совмещены, называются неравными.



Черт. 11.

Задача. 26. Треугольники ABC и DEF (черт. 11) равны. Известно, что в них $\angle A = \angle E$ и $AC = DE$. Отметить прочие равные углы и равные стороны.

Построение треугольника. 1. Данных недостаточно. Надо построить треугольник, у которого основание AB равно 10 см. и левый угол $A=61^0$.



Черт. 12. Построение треугольника. Данные: $AB = 10$ см., $\angle A = 61^0$.

Основание треугольника обозначим бумажной полоской AB, а левый угол вырежем из бумаги (черт. 12). Левая боковая сторона пойдет по прямой AC, которая обозначена также бумажной полоской. Правая боковая сторона начинается от точки B. Так как кроме осно-

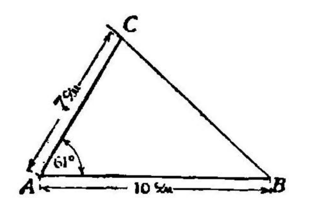
вания AB и угла A других данных мы не имеем, то левая сторона может быть взята произвольной длины, и наклон стороны BC к основанию может быть по желанию взят больше и меньше. Следовательно, мы будем иметь множество неравных между собой треугольников, имеющих одно и тоже основание $AB = 10$ см. и один и тот же левый угол $A = 61^0$. Поэтому задача наша—неопределенная. Два данных—сторона и прилежащий к ней угол—не определяют треугольника.

Задача. 27. Построить треугольник, основание которого равно 10 см. и правая сторона 8 см. Определенная ли задача?

2. Данных больше, чем надо. Построить треугольник, у которого

$$AB = 10 \text{ см.}$$
$$\angle A = 61^0$$
$$AC = 7 \text{ см.}$$
$$\angle C = 76^0$$
$$BC = 9 \text{ см.}$$
$$\angle B = 43^0$$

Построим основание AB треугольника, равное 10 см. К нему пристроим слева угол A равный 61⁰ (черт. 13). На стороне этого угла, начиная от точки A, отложим $AC = 7$ см. Тогда мы будем иметь три вершины треугольника A, B и C, и нам останется только соединить точки B и C, чтобы закончить треугольник.



Черт. 13. Построение треугольника. Данные: $\angle A = 61^0$, $AB = 10$ см. и $AC = 7$ см.

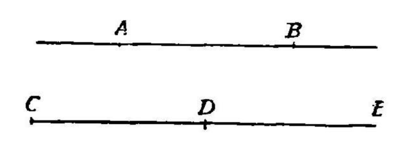
Из шести данных нам понадобилось для построения треугольника только три—две стороны и угол, заключенный между ними. Прочие данные—два угла и сторона—получились сами собой. И если измерим эти два угла и сторону, то увидим, что $\angle C = 76^0$, $\angle B = 43^0$ и $BC = 9$ см.

Итак, когда нам даны две стороны и угол, заключенный между ними, то мы можем построить по этим данным вполне определенный треугольник. В этом случае говорят: две стороны и угол, заключенный между ними, вполне определяют треугольник.

Задачи. 28. Построить прямоугольный треугольник, у которого стороны прямого угла (катеты) равны 3 см. и 4 см.

29. Построить равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны 4 см., а угол при вершине 50°.

Неограниченная прямая линия и ее отрезок. 1. Начертим на доске прямую линию *AB* (черт. 14), продолжим ее вправо и влево. Продолжая ее так, мы достигнем краев доски. Представим себе что прямая линия тянется и далее в обе стороны. В геометрии, когда говорят о прямой линии, подразумевают неограниченную прямую линию



Черт. 14. Прямая линия и ее отрезок *AB*, который перенесен на прямую *CE*: *CD*=*AB*

Часть ее *AB*, имеющую границы—концы *A* и *B*, называют отрезком прямой линии.

2. Отложим на прямой *CE* отрезок *AB* так, чтобы его конец *A* совпал с точкой *C*. Для этого измерим отрезок *AB* какой-либо мерой длины. Пусть он равен 23 мм. Отмерим также на прямой *CE* отрезок *CD*=23 мм.

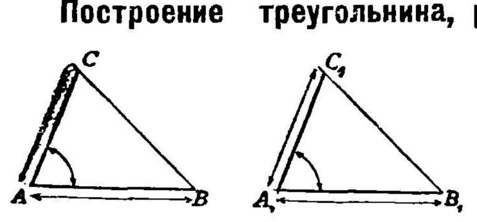
Отрезок *CD* можно перенести и не измеряя его. Для этого, растворив циркуль настолько, чтобы его острия пришлись в точках *A* и *B*, отметим затем на прямой *CE* точку *D*.

Задача. 30. Отметим где угодно две точки. Можно ли чрез них провести или вообразить прямую линию?

Отметить где угодно три точки. Можно ли чрез них провести прямую линию?

Отметить три точки, лежащие на прямой линии.

Построение треугольника, равного данному. Первый способ. Дан треугольник *ABC* (черт. 15) Надо в другом месте построить треугольник, равный данному.

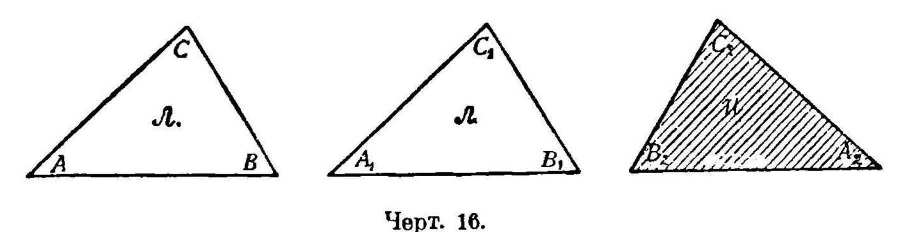


Черт. 15. Построение треугольника $A_1B_1C_1$, равного данному треугольнику *ABC*.

Так как две стороны и угол между ними вполне определяют треугольник, то выберем в данном треугольнике две какие угодно стороны его и угол между ними, напр., стороны *AB* и *AC* и

угол A. Построим по этим данным новый треугольник $A_1B_1C_1$.

Так как по данным двум сторонам и углу, заключенному между ними, можно построить один вполне определенный треугольник $A_1B_1C_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ не могут быть неравными. В равенстве треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ можно убедиться, налагая один на другой следующим образом. Вырезав треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ из бумаги, расположим их так, чтобы равные их стороны AB и A_1B_1 служили их основаниями и равные стороны AC и A_1C_1 оказались левыми боковыми сторонами (черт. 16). Назовем поверхности треугольников,



Черт. 16.

обращенные к нам, „лицом“ и отметим их буквой „Л“. Назовем обратные поверхности „изнанкой“ и обозначим их буквой „И“. Положив оба треугольника лицевой поверхностью к нам, надвинем треугольник $A_1B_1C_1$ на треугольник ABC так, чтобы совпали их, напр., основания AB и A_1B_1. Тогда и сами треугольники совпадут.

Задача. 31. Положив треугольник ABC (черт. 16) на стол лицевой стороной наверх, а треугольник $A_2B_2C_2$—лицевой стороной вниз, можно ли их совместить, не переворачивая ни одного из них на другую сторону?

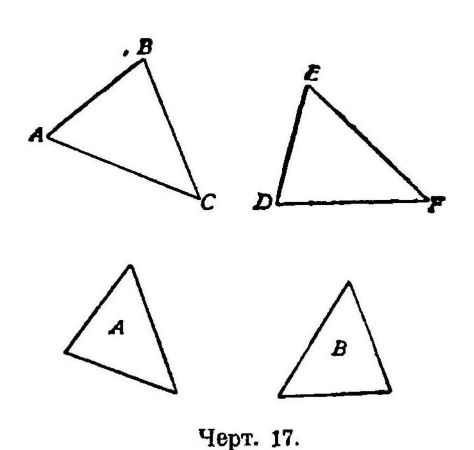
Для того, чтобы перенести треугольник, переносим две стороны его и угол, заключенный между ними, и по этим данным строим треугольник. Новый треугольник будет равен данному.

Отсюда же выводим правило, как удостовериться, равны ли данные треугольники:

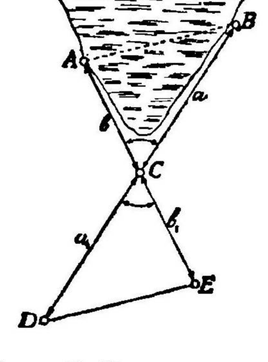
Если две стороны и угол между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то треугольники равны.

Задачи. 32. Начертить какой бы то ни было треугольник. Построить другой треугольник, равный ему.

33. Равны ли треугольники ABC и DEF (черт. 17)? треугольник A и B (черт. 17)?

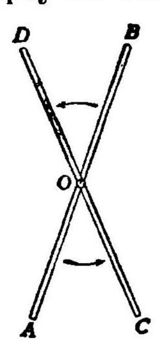


Черт. 17.



Черт. 18. Измерение недоступного расстояния AB. $DCE = ACB$. $DE = AB$.

Расстояние между точками A и B, между которыми нет сообщения по прямой линии. 1. Точка A и B взяты на берегу бухты (черт. 18). Надо измерить расстояние AB, не переезжая через бухту. Выберем точку C, от которой можно пройти к точкам A и B по прямым линиям. Поставим в точках A, B и C вехи, которые обозначат треугольник.



Черт. 19. Противоположные углы.

Перенесем этот треугольник на сушу. Но как это сделать? Как перенести угол ACB с одного места на другое? Сперва ответим на этот последний вопрос.

2. Закрепим две бумажные полоски AB и CD в точке O кнопкой (черт. 19). Углы AOC и DOB, составленные двумя пересекающимися прямыми линиями, называются противоположными. Если полоски раздвигать или сдвигать, то углы AOC и DOB будут одновременно возрастать или убывать, оставаясь равными.

Противоположные углы равны.

Задачи. 34. Указать противоположные углы в комнате у разных предметов!

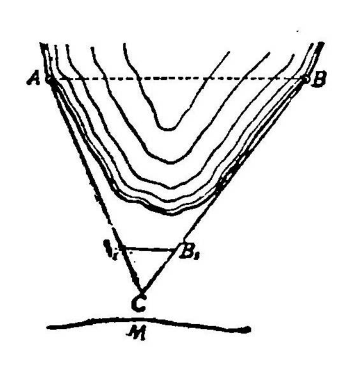
35. Как изменяются противоположные углы у ножниц, когда ножницами режут?

3. Чтобы перенести треугольник ACB (черт. 18) на сушу, продолжим стороны AC и BC за точку C. Отмерим отрезок CE, равный AC, и отрезок CD, равный BC. Получим треугольник DCE. В треугольниках ACB и DCE

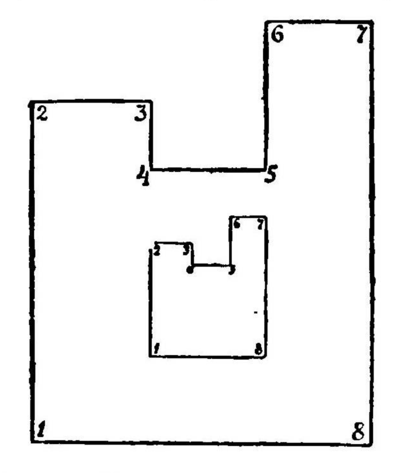
$$CE = AC,$$
$$CD = BC,$$
$$\angle DCE = \angle ABC;$$

Поэтому треугольники ACB и DCE равны. Их соответственные стороны AB и DE равны. Измерив DE, будем знать расстояние AB.

Подобные треугольники. 1. Может случиться, что холмистая местность M (черт. 20) мешает перенесению тре-



Черт. 20. Измерение недоступного расстояния AB. Треугольники CA_1B_1 и CAB подобны. $AB = 5\ A_1B_1$.



Черт. 21. Многоугольники 12345678 и 12345678 подобны.

угольника ABC на сушу. Тогда его можно уменьшить так, как это мы делали некогда (См. Нач. курс геом., ч. I) с прямоугольным участком земли, снимая его план.

На черт. 21 мы видим две прямоугольных фигуры 12345678 и 12345678. Стороны 12, 23, 34 и т. д. первой фигуры в три раза длиннее сторон 12, 23, 34 и т. д. второй. Углы обеих фигур прямые и потому равны. Фигуры эти имеют одну и ту же форму, похожи друг на друга или подобны друг другу.

2. Попытаемся теперь так же сократить и треугольник ACB (черт. 20). Разделим стороны его AC и BC на

5 равных частей. Отрезки A_1C и B_1C в пять раз короче сторон AC и BC треугольника. Соединив точки A_1 и B_1 получим треугольник A_1CB_1, похожий на треугольник ACB, или подобный треугольнику ACB.

В чем это подобие заключается? Сравнивая на чертеже углы и стороны этих треугольников, мы убеждаемся что

$$\angle CA_1B_1 = \angle CAB,$$
$$\angle CB_1A_1 = \angle CBA,$$

$\angle C$—общий для обоих треугольников.

Сравним теперь стороны, лежащие против равных углов: AC и A_1C, BC и B_1C AB и A_1B_1. Эти стороны будем называть соответственными. Сторона AC в пять раз длиннее стороны A_1C. Эту мысль запишем так:

$$\frac{AC}{A_1C} = 5.$$

Также найдем

$$\frac{BC}{B_1C} = 5,$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = 5.$$

Треугольники называются подобными, когда углы одного равны углам другого и стороны одного в одно и то же число раз больше соответственных сторон другого или стороны одного составляют одну и ту же часть соответствующих сторон другого.

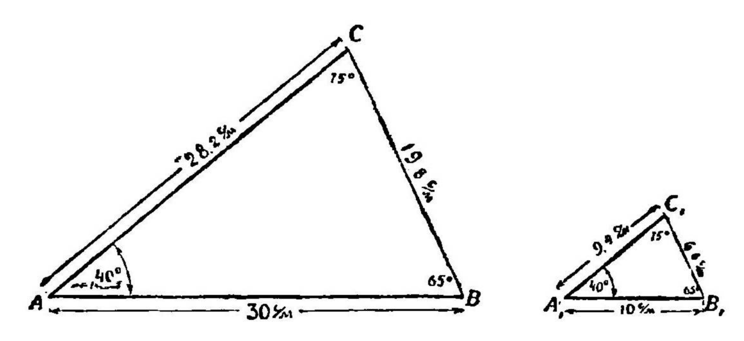
Построение треугольника, подобного данному: первый способ. Дан треугольник ACB (черт. 22). Надо построить подобный ему треугольник, сократив его стороны, напр., в три раза.

Разделив стороны $AC = 28{,}2$ см. и $AB = 30$ см. на 3 равные части и измерив угол между ними A, получим 9,4 см., 10 см. и 40^0. По этим трем данным построим треугольник $A_1C_1B_1$.

Подобны ли треугольники ACB и $A_1C_1B_1$? Измерив стороны BC и B_1C_1, найдем $BC = 19{,}8$ см. и $B_1C_1 = 6{,}6$ см. Сторона BC больше стороны B_1C_1 в три раза.

$\angle C = \angle C_1 = 75^0$ и $\angle B = \angle B_1 = 65^0$. Значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

Чтобы построить треугольник, подобный данному, уменьшаем или увеличиваем две



Черт. 22. Построение треугольника $A_1B_1C_1$, подобного треугольнику ABC.

стороны его в одно и то же число раз, угол же между ними сохраняем без изменения, и по этим трем данным строим треугольник. Новый треугольник будет подобен данному.

Задача. 36. Дан треугольник. Начертить новый треугольник, стороны которого были бы вдвое длиннее его сторон. Сравнить соответственные высоты этих треугольников.

Отношение и пропорция. У подобных треугольников ACB и $A_1C_1B_1$ (черт. 22) соответственные стороны имеют следующие численные значения:

$$AB = 30 \text{ см. и } A_1B_1 = 10 \text{ см.},$$
$$AC = 28{,}2 \text{ см. и } A_1C_1 = 9{,}4 \text{ см.},$$
$$BC = 19{,}8 \text{ см. и } B_1C_1 = 6{,}6 \text{ см.},$$

Отсюда можем написать

$$\frac{30}{10} = 3,$$

$$\frac{28{,}2}{9{,}4} = 3,$$

$$\frac{19{,}8}{6{,}6} = 3.$$

Частное 3, показывающее во сколько раз 30 больше 10, называется отношением двух чисел: 30 и 10.

Выражение $\frac{30}{10}$ также называется отношением. Это— отношение еще не вычисленное.

Напишем еще отношения:

$$\frac{10}{30}=\frac{1}{3},$$
$$\frac{9,4}{28,2}=\frac{1}{3},$$
$$\frac{6,6}{19,8}=\frac{1}{3}.$$

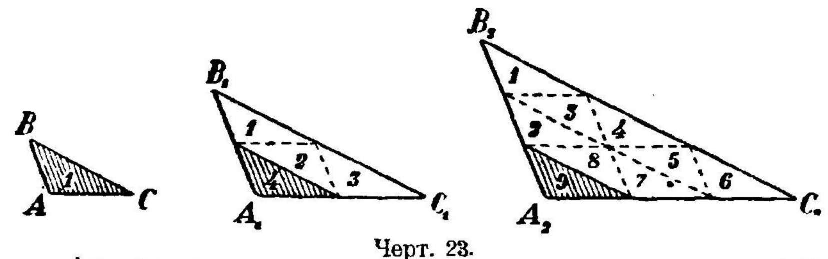
Здесь отношение $\frac{1}{3}$ показывает, какую часть числа 30 составляет число 10, какую часть числа 28,2 составляет число 9,4, какую часть числа 19,8 составляет число 6,6.

Отношения соответственных сторон в подобных треугольниках, как мы видим, равны:

$$\frac{30}{10}=\frac{28,2}{9,4}$$
$$\frac{30}{10}=\frac{19,8}{6,6}$$
$$\frac{28,2}{9,4}=\frac{19,8}{6,6}$$

Эти равенства называются пропорциями Пропорция есть равенство двух отношений.

Задачи. 37. Вырезать из бумаги 14 равных между собою треугольников. Из 4 треугольников составить треугольник $A_1B_1C_1$



Черт. 23.

черт. 23). Из 9 треугольников составить треугольник $A_2B_2C_2$.

Остается еще треуг. ABC. Подобны ли треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC? $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$? Указать у них равные углы! Соответственные стороны! Написать отношения соответственных сторон! Написать различные пропорции, которые можно составить из этих отношений.

38. Даны два подобных треугольника. В одном измерены две стороны 14 см. и 16,1 см. В другом треугольнике сторона, соответствующая первой из этих сторон, равна 3,5 см. Вычислить вторую сторону.

39. Основание треугольника 15 см., высота 12 см. Вычислить основание подобного ему треугольника, если его высота, соответствующая данной высоте в первом треугольнике, равна 6 см.! 18 см.! Обозначив неизвестное основание через x, написать пропорцию и решить уравнение.

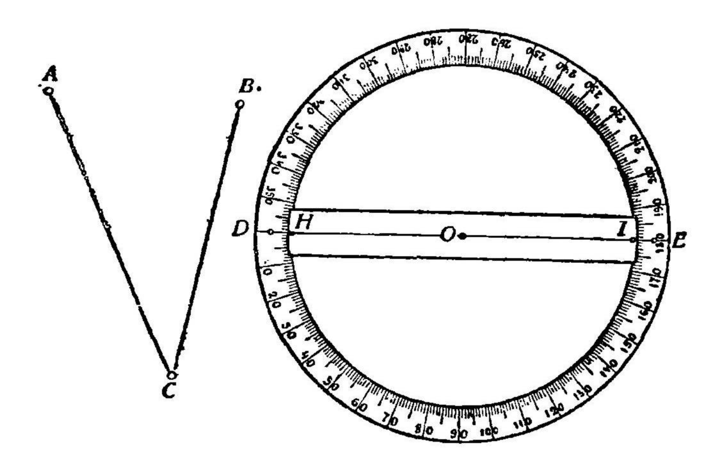
40. Стороны треугольного участка земли 38 м. и 29 м., угол между ними 87°. Начертить план его в масштабе 1 : 500. Измерить третью сторону.

41. План треугольного участка земли имеет стороны 3,5 см., 2 см. и 2,8 см. Каковы действительные стороны участка, если план сделан в масштабе 1: 10000?

Измерение недоступного расстояния. При измерении недоступного расстояния часто бывает трудно перенести треугольник ABC (черт. 20) на другое место, сохраняя настоящую его величину; тогда мы можем его стороны сократить, т.-е. построить треугольник, подобный треугольнику ABC, уменьшив его стороны. На чертеже стороны A_1C и B_1C в пять раз короче сторон AC и BC, угол же C у треугольников ABC и A_1B_1C—общий. Потому эти треугольники подобны. Измерив сторону A_1B_1 и взяв полученное число 5 раз, получим расстояние AB.

Измерение углов на местности. Астролябия. Мы могли бы треугольник ABC (черт. 20) перенести в сокращенном масштабе на бумагу. Но тогда надо уметь измерить угол C. Угол этот измеряется с помощью угломера, иначе астролябии, которую можно устроить так. На листе бумаги проводятся из одного и того же центра 4 окружности радиусами 10 см., $10^1/_2$ см., 11 см. и 12 см. Эти окружности ограничивают три кольца: на первом ближайшем к центру кольце наносятся градусы—всего 360°, на втором отмечаются пятки градусов, на третьем—десятки. Надпись градусов делается в направлении обратном движению часовой стрелки (см. черт. 24). Этот бумажный

круг прикалывается кнопками к квадратной ровной гладкой доске (24 см. × 24 см.). На другой стороне доски поперек ее волокон привинчен брусок, посредине которого сделано круглое отверстие. Этим отверстием доска насаживается на палку, другой конец которой заострен для втыкания в землю. Лучше однако на другом конце палки



Черт. 24. Угломер (астролябия).

просверлить продольную дыру сантиметров на 10 и в нее воткнуть железный прут, длиной сантиметров в 20. Прут должен войти в дыру с трением. Чтобы он не выдергивался обратно, на нем можно насечь зазубрины. Заостривается он ударами молотка. С помощью такого прута палка легко укрепляется на земле и прочно стоит.

В центре бумажного круга булавкой прикрепляется линейка. Вдоль линейки, посредине ее проводится черта, которая должна пройти точно чрез отверстие O для булавки (черт. 24). У концов этой черты в линейку втыкаются по возможности отвесно две булавки в точках H и I. Кроме того, на круге против делений 0^0 и 180^0 укрепляются две булавки D и E.

Угол ACB (черт. 20 и 24) измеряется с помощью астролябии так. В точке C втыкается палка с астролябией так, чтобы круг был по возможности горизонтален. Поместив глаз перед булавкой E не ближе полуаршина от

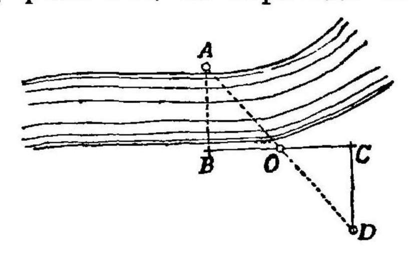
нее, вращаем круг, пока булавки *E* и *D* не покроют правую веху *B*. После этого, поворачивая линейку, таким же способом направляем ее на веху *A*. Угол *BCA* будет равен углу, составленному диаметром *ED* круга и чертой *HI* линейки. Сосчитав число градусов между 0^{0} и тем делением круга, против которого остановится конец *H* черты линейки, узнаем этот угол.

Задачи. 42. Взяв круг астролябии в руку (без палки), измерить приблизительно, под каким углом видны в классе края классной доски, иначе говоря, измерить угол между прямыми, идущими от центра астролябии к краям доски! Под каким углом видны края стены, окна и т. д.?

43. Оценить на глаз угол, под которым мы видим разные предметы в классе и на местности; затем проверить полученные результаты с помощью астролябии.

44. Отметить на местности вехами треугольник и измерить его углы с помощью астролябии.

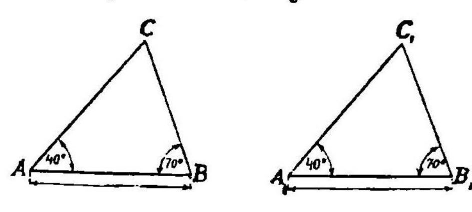
Построение треугольника, равного данному: второй способ. 1. Надо измерить ширину реки *AB*, не переходя через реку. На противоположном берегу реки находится какая-нибудь метка *A* (напр., дерево, кол и пр.) (черт. 25). Поставив эккер в *B* так, чтобы две булавки его стояли на одной прямой линии с точкой *A*, по двум другим остриям отметим вехой *O* прямую *BO*. Три точки *A*, *B* и *O* обозначают прямоугольный треугольник *ABO*. Можно ли перенести треугольник *ABO* на другое место? В этом треугольнике мы можем измерить сторону *OB*, угол *B* и угол *O*. Определяют ли эти данные треугольник?



Черт. 25. Измерение ширины реки. $\triangle COD = \triangle AOB$; $CD = AB$.

2. Построим треугольник, у которого основание $AB = 7$ см. и углы, прилежащие к нему, равны: $\angle A = 40^{0}$ и $\angle B = 70^{0}$. Получим один вполнѐ определенный треугольник *ABC*. И если бы мы построили по тем же данным еще треугольник $A_1B_1C_1$ (черт. 26), то эти треугольники оказались бы равными.

Отсюда видим, что для того, чтобы перенести треугольник, переносим сторону его и два прилежащих к ней угла и по этим данным строим треугольник. Новый треугольник будет равен данному.



Черт. 26. Построение треугольника $A_1B_1C_1$, равного треугольнику ABC.

Отсюда же выводим второе правило, как удостовериться, равны ли два данных треугольника:

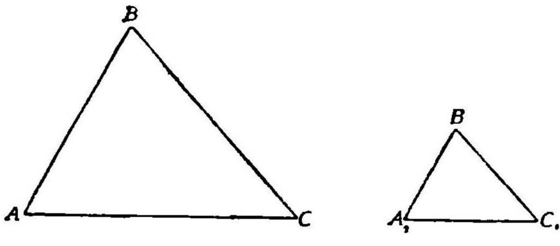
Когда сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого, то треугольники равны.

3. Возвратимся к задаче о ширине реки (черт. 25). Перенесем треугольник ABO на сушу. Для этого, продолжив прямые BO и AO, отмерим отрезок OC, равный OB. Поставив в точку C эккер так, чтобы две булавки его находились на одной прямой с точкой B, отметим прямую CD, перпендикулярную к BC. Подберем точку D, лежащую на прямых AD и CD. Треугольники ABO и DCO равны, ибо $BO=CO$, $\angle ABO=\angle DCO$ и $\angle AOB=\angle DOC$. Измерив расстояние CD, будем знать ширину реки AB.

Задачи. 45. Построить прямоугольный треугольник, у которого сторона прямого угла (катет) равна 45 мм. и острый угол 50°.

46. Построить равнобедренный треугольник, у которого основание равно 3,7 см., а угол, прилежащий к нему, 70°.

Построение треугольника, подобного данному: второй способ. Мы перенесли треугольник ABO (черт. 25) на другое место, не изменив при этом его величины. Нельзя ли перенести его на бумагу в уменьшенном масштабе?



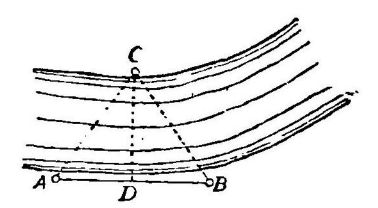
Черт. 27. Построение треугольника $A_1B_1C_1$, подобного треугольнику ABC.

1. Дан треугольник ABC (черт. 27), основание кого-

рого 30 см., а углы, прилежащие к нему, 60° и 50°. Требуется построить треугольник, ему подобный. Уменьшив основание его в сколько угодно раз, напр., в 2 раза, оставим прилегающие к нему углы без изменения: $\angle A = 60°$ и $\angle B = 50°$. По этим трем данным построим треугольник $A_1C_1B_1$. Убедитесь, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

Чтобы построить треугольник, подобный данному, уменьшаем или увеличиваем сторону его в данное число раз, а углы, прилежащие к ней, сохраняем без изменения; построим треугольник по этим трем данным. Новый треугольник будет подобен данному.

2. Измерим ширину реки. На берегу реки отметим вехами линию AB (черт. 28), которая называется базой. На другом берегу пусть будет какая-либо метка C. Измерив в треугольнике ACB сторону AB и углы A и B, строим треугольник, подобный треугольнику ABC, в выбранном масштабе и затем измеряем его высоту CD.



Черт. 28. Измерение ширины реки.

Задача. 47. Начертить в масштабе 1 : 300 план участка земли, имеющего форму прямоугольного треугольника, у которого катет равен 15 м. и острый угол, прилежащий к нему, 30°.

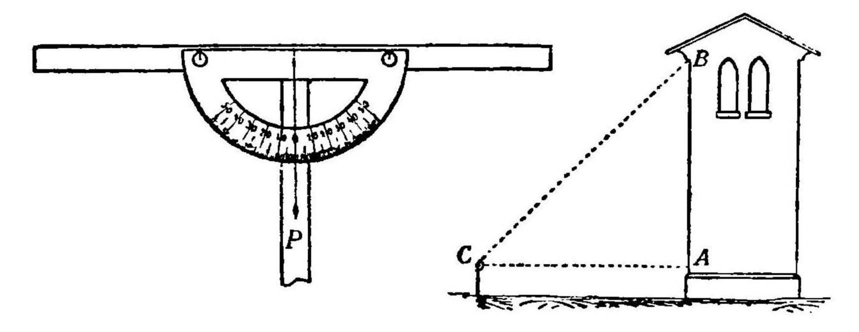
3. При построении треугольника $A_1B_1C_1$, подобного треугольнику ABC (черт. 27), мы сторону AC уменьшили в два раза. Мы могли бы однако выбрать сторону A_1C_1 какой угодно длины. И если на ней мы построим углы A_1 и C_1, равные углам A и C, то треугольник $A_1B_1C_1$ будет подобен треугольнику ABC.

Значит, если построить несколько треугольников по данным двум углам, то все они будут подобны.

Измерить высоту стены. Чтобы измерить высоту стены AB (черт. 29), отмеряем на горизонтальной поверхности земли расстояние от нее AC. Положим, что глаз наблюдателя находится в точке C. Если бы мы знали угол BCA, то могли-бы построить прямоугольный треуголь-

ник, подобный треугольнику *CBA*; тогда нашли бы, пользуясь принятым при построении масштабом, сторону *AB*. Зная высоту глаза *C* над землею, будем знать высоту стены.

Как же измерить угол *ACB*? Для этого слу-



Черт. 30. Высотомер. Черт. 29. Измерение высоты стены.

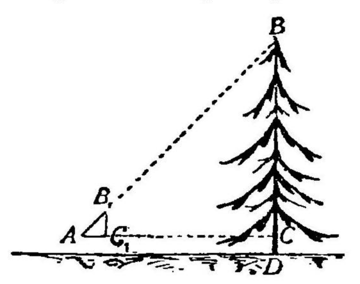
жит прибор, называемый в ы с о т о м е р о м (черт. 30). К палке *P* привинчивается линейка длиной дюймов 14 и шириною в 1 дюйм, которая вращается в отвесной плоскости с трением и остается в том положении, какое мы ей сообщаем. К линейке прикрепляется транспортир и отвес. Диаметр транспортира должен быть параллелен ребру линейки, а нить отвеса должна перевешиваться через центр дуги транспортира. Транспортир делается из бумаги. Нуль ставится посредине дуги транспортира. В обе стороны от нуля идут деления 10°,20°, 30°,40° и 50°. Деления, следующие за 50° и даже за 40°, бесполезны: ими не приходится пользоваться.

Установим палку с высотомером отвесно в точке *C*. Когда нить отвеса проходит чрез 0° транспортира, верхнее ребро линейки принимает горизонтальное положение. Поместив глаз у конца линейки на расстоянии 6—8 вершк. от него, будем поворачивать ее, пока оба конца линейки и точка *B* не окажутся на одной прямой линии. Это случится в тот момент, когда ребро линейки будет казаться точкой, совпадающей с точкой *B*.

Диаметр транспортира сперва имел горизонтальное положение *CA*, затем принял положение *CB*, т. е. повернулся на угол *BCA*. Как измерить этот угол? Этот угол

мы отсчитаем по транспортиру от 0° до того деления, против которого остановилась нить отвеса.

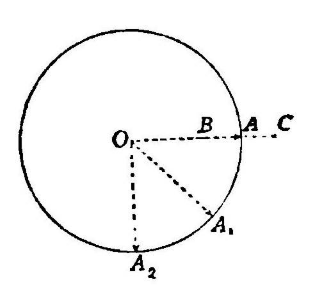
Измерение высоты предмета с треугольником в руках. Возьмем в руки бумажный равнобедренный прямоугольный треугольник AB_1C_1 (черт. 31) так, чтобы катет его B_1C_1 был отвесен. Держа треугольник перед глазами, на расстоянии 6—8 вершков от глаза, приближаемся к дереву или отходим от него, пока точки A, B_1, и B не окажутся на одной прямой. В это время треугольники ABC и AB_1C_1 будут подобны. Так как треугольник AB_1C_1,— равнобедренный, то треугольник ABC — также равнобедренный, и $BC = AC$. Высота дерева равна $AC + CD$.



Черт. 31. Измерение высоты: $BC = AC$.

Построение треугольника, равного данному: третий способ. 1. Дана точка O. Обозначить на плоскости место тех точек, которые находятся на расстоянии 3 см. от этой точки.

Радиусом в 3 см. опишем около точки O окружность (черт. 32, на чертеже радиус уменьшен в два раза). Точка B, взятая внутри круга, находится от центра O на расстоянии меньшем 3 см.; точка же C, взятая вне круга, лежит на расстоянии большем 3 см. Точки A, A_1 A_2 и всякая другая точка, лежащая на окружности, как раз будут находиться на расстоянии 3 см. от точки O.

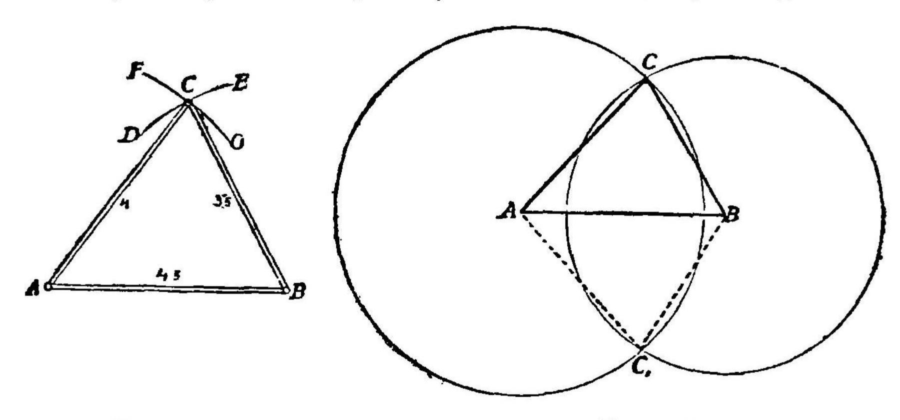


Черт. 32. Точки A, A_1 и A_2 лежат на одном и том же расстоянии от центра O. B ближе, C дальше от центра O, чем A_1.

2. Построим треугольник, стороны которого равны $AB = 9$ см., $AC = 8$ см. и $BC = 7$ см.

Изобразим эти стороны сперва в виде узких бумажных полосок. Приняв первую полосу AB за основание (черт. 33), пришпилим ее кнопками к столу. Концы двух других полосок AC и BC прикрепим теми же кнопками

в точках A и B. Чтобы вышел треугольник, надо свести другие концы полосок. Эти концы до встречи будут описывать дуги DE и FG. Радиус первой дуги 7 см., второй— 8 см. (на чертеже стороны уменьшены вдвое). Встретятся



Черт. 33. Черт. 34.

Построение треугольника по трем данным сторонам.

концы в точке C, которая будет вершиной требуемого в задаче треугольника, ибо расстояния AC и BC равны 8 см. и 7 см.

Начертим требуемый треугольник. Начертим сперва основание $AB = 9$ см. (черт 34). Найдем теперь место точек, находящихся на расстоянии 8 см. от точки A. Это будет окружность, описанная вокруг точки A радиусом в 8 см. Далее найдем место точек, лежащих на расстоянии 7 см. от точки B. Это окружность, описанная вокруг точки B радиусом 7 см. Эти две окружности пересеклись в точках C и C_1. Так как точка C лежит на расстояниях 8 см. и 7 см. от точек A и B, то треугольник ACB будет иметь данные нам стороны. То же надо сказать и о треугольнике AC_1B.

Хотя у нас и получилось два треугольника, но если вырезать из бумаги фигуру $ACBC_1$ и перегнуть ее по линии AB, то треугольники ACB и AC_1B сольются. Таким образом, при построении треугольника по данным трем сторонам, мы получаем один вполне определенный треугольник. И если бы мы по тем же трем сторонам

построили в разных местах несколько треугольников, то все они оказались бы равными.

Следовательно, для того, чтобы перенести треугольник с одного места на другое, переносим три его стороны и по этим данным строим треугольник. Новый треугольник будет равен данному.

Отсюда же видим, как узнать, равны ли два треугольника:

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого, то треугольники равны.

Задачи. 48. Построить треугольник, имеющий стороны 5 см., 4 см. и 3 см.

49. Какие из треугольников, изображенных на черт. 17, равны? Разыскав равные треугольники, указать, какие углы в них равны.

Построение треугольника, подобного данному: третий способ. Дан треугольник *ABC*, стороны которого 30 см., 24 см. и 28 см. Построить треугольник ему подобный, уменьшив стороны его в 5 раз.

Уменьшив стороны треугольника *ABC* в 5 раз, построим треугольник $A_1B_1C_1$ по новым трем сторонам 6 см., 4,8 см. и 5,6 см. Сравнив углы треугольников *ABC* и $A_1B_1C_1$, увидим, что треугольники эти подобны.

Итак, чтобы построить треугольник, подобный данному, уменьшаем или увеличиваем три его стороны в одно и то же число раз, и затем строим треугольник по этим трем сторонам. Новый треугольник будет подобен данному.

Задачи. 50. Начертить какой угодно треугольник. Начертить подобный ему треугольник, увеличив стороны его вдвое.

51. Можно ли снять план треугольного участка земли, не пользуясь астролябией? Как это сделать?

3. Приближенное число.

1. В предшествующих работах мы измеряли расстояния на местности мерной веревкой, длиной в 5 саж. Посмотрим, верны ли те числа, которые мы при этом получали? Возьмем эту же веревку и натянем ее. Попробуем натянуть сильнее: она подается, удлиняется. Отпустим несколько: веревка становится короче.

Однако видно на-глаз, что натягивая и ослабляя веревку, мы изменяем ее длину меньше, чем на один дюйм.

Отмеряя каждый раз по 5 саж., мы стараемся начало веревки свести с концом, отмечая конец ее спицей. И тут возможна ошибка.

Значит, каждый раз, отмеряя веревкой расстояние 5 саж., мы делаем ошибку. Какова эта ошибка, мы не знаем, и никто ее не знает. Будем считать, оценивая эту ошибку на-глаз, приблизительно, что она меньше одного дюйма. Как это понимать? Отмеренное веревкой расстояние мы обозначили двумя спицами и считали равным 5 саж. На самом же деле истинное расстояние между этими спицами может быть и больше, и меньше 5 саж. Так как ошибка меньше одного дюйма, то это расстояние может оказаться равным

5 саж.; 5 саж. 1 лин.; 5 саж. 2 лин... 5 саж. 9 линий.

5 саж. без 1 лин.; 5 саж. без 2 лин... 5 саж. без 9 лин.

Оно меньше 5 саж. 1 дюйма и больше 5 саж. без 1 дюйма. Иначе говорят: точное расстояние заключается между границами 5 саж. — 1 дюйм и 5 саж. + 1 дюйм. Числа 5 саж. 1 дюйм и 4 саж. 6 фут. 11 дюйм. — границы точного расстояния. Считая расстояние равным 5 саж., мы делаем ошибку, которая меньше одного дюйма. Поэтому число 5 саж. называют приближенным числом с ошибкою меньшей 1 дюйма; а 1 дюйм называют в этом случае границей ошибки.

2. Начертив отрезок прямой, предложим всем учащимся класса измерить его миллиметровой линейкой как можно внимательнее, стараясь оценить на-глаз даже части миллиметра, если это понадобится. Ответы будут разные, хотя и близкие между собой. Пусть наименьшее полученное число 75,5 мм., а наибольшее 76,3 мм. Разница между этими числами 0,8 мм. Поэтому мы можем предположить, что, принимая отрезок равным 75,5 мм. или 76,3 мм., мы делаем ошибку не большую 0,8 мм. и во всяком случае меньшую 1 мм. А если примем длину отрезка равной 76 мм., то ошибка будет не больше 0,5 мм.

Задача. 52. На плане измерена линия, которая оказалась равной 5,7 см. с ошибкой меньшей 0,5 мм. Между какими границами заключается истинная длина линии?

Все измерения, какие только люди, и даже самые ученые люди, делают—неточны, т.-е. заключают ошибку. Ошибка эта в зависимости от качества инструментов и от старательности измерителя может быть больше или меньше.

3. Вычислим длину всех сторон (периметр) треугольного участка земли, стороны которого 75,3 саж., 50 саж. и 64,5 саж. и измерены каждая с ошибкой меньшей 0,2 саж.

Длина всех сторон вместе равна сумме

$$75{,}3 + 50 + 64{,}5 = 189{,}8 \text{ (саж.)}.$$

Так как слагаемые числа приближенные, то и сумма не будет числом точным. Ошибки ее мы узнать не можем, но границу этой ошибки вычислить можем.

Точная длина первой стороны треугольника заключается между границами 75,1 саж. и 75,5 саж., точная длина второй стороны—между границами 49,8 саж. и 50,2 саж., точная длина третьей стороны между границами 64,3 саж. и 64,7 саж.

Самыми неблагоприятными для нас будут случаи, когда истинные длины сторон окажутся или 75,1 с., 49,8 с. и 64,3 с., или 75,5 с., 50,2 с. и 64,7 с.; ибо тогда наша сумма 189,8 с. будет заключать наибольшую ошибку.

В первом случае точная сумма оказалась бы равной

$$75{,}1 + 49{,}8 + 64{,}3 = 189{,}2.$$

Во втором случае точная сумма была бы

$$75{,}5 + 50{,}2 + 64{,}7 = 190{,}4.$$

Принимая сумму сторон треугольника равной 189,8 с., мы рискуем сделать ошибку в самом худшем случае равной или разности

$$189{,}8 - 189{,}2 = 0{,}6 \text{ с.},$$

или разности

$$190{,}4 - 189{,}8 = 0{,}6 \text{ с.}$$

Значит, полученное нами число 189,8 саж. заключает ошибку меньшую 0,6 саж.

Задача. 53. Стороны треугольника 3,5 см., 4,1 см. и 5 см. измерены каждая с ошибкой меньшей 0,1 см. Вычислить их сумму и найти границу ее ошибки.

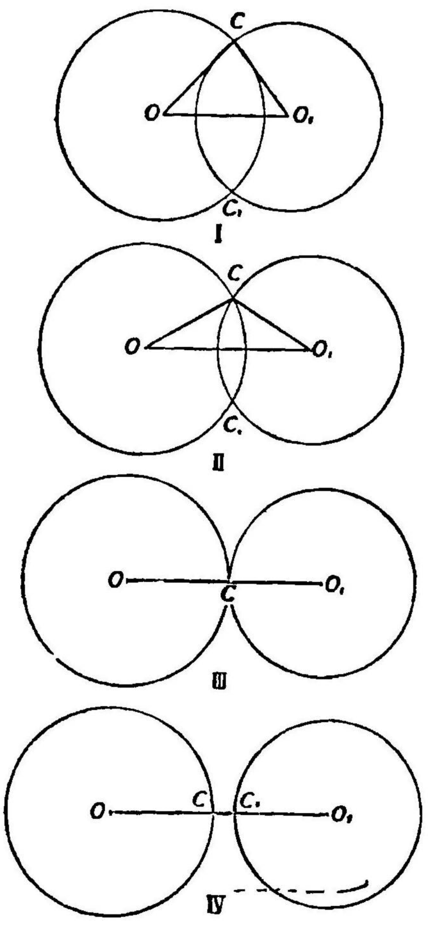
4. Положение двух окружностей на плоскости.

Когда мы строили треугольники по данным трем сторонам, то утверждали, что три стороны вполне определяют треугольник. Но вот какого вопроса мы не ставили себе: если нам даны три каких либо отрезка прямой, то всегда ли можно составить из них треугольник, иначе говоря, можем ли мы выбирать для треугольника стороны какой угодно длины?

Задача. 54. Вырежьте три бумажных полоски длиной 10 см., 8 см. и 5 см. Соединяя их концы, попробуйте составить треугольник.

Возьмите три бумажных полоски длиной 10 см., 6 см. и 3 см. Удастся ли составить из них треугольник?

1. Построим треугольник, стороны которого равны: 2,4 см, 2 см., 1,8 см. (черт. 35). Откладываем отрезок $OO_1 = 2,4$ см. (черт. 35, I). Окружности, описанные вокруг точек O и O_1 радиусами в 2 см. и в 1,8 см., пересеклись в точках C и C_1. Треугольник OCO_1—требуемый задачей.



Черт. 35. Черт. I и II — окружности пересекаются: на черт. I точка C дальше от OO_1, чем на черт. II. Черт. III—окружности касаются. Черт. IV—одна окружность лежит вне другой.

2. Построить треугольник по сторонам, равным 2,4 см., 1,6 см. и 1,2 см.

Окружности, описанные вокруг точек O и O_1 (черт. II) радиусами в 1,6 см. и в 1,2 см., пересеклись в двух точках. Получился треугольник OCO_1. Вершина его ближе к основанию, чем у предыдущего треугольника.

3. Построить треугольник по сторонам 2,4 см., 1,4 см. и 1 см.

Окружности, описанные вокруг точек O и O_1 (черт. III), не пересеклись, а только коснулись. Точка их касания С лежит как раз на прямой OO_1, соединяющей их центры.

Не существует такого треугольника, который имел бы стороны 2,4 см., 1,4 см. и 1 см.

4. Построить треугольник, стороны которого равны 2,4 см., 1,2 см. и 1 см.

Окружности, описанные вокруг точек O и O_1 (черт. IV) радиусами 1,2 см. и 1 см., вовсе не пересекаются. Поэтому не может существовать треугольник, у которого стороны были бы равны 2,4 см., 1,2 см. и 1 см.

Когда окружности пересекаются, касаются и лежат одна вне другой? В первых двух задачах окружности пересеклись. В третьей—они коснулись только. В четвертой и вовсе не встретились. Посмотрим, когда же окружности, лежащие на плоскости, пересекаются, касаются или лежат раздельно?

Сравнивая положение точки C на первых трех чертежах, т.-е. на чертежах I, II и III, видим, что она дальше всего от линии OO_1, на черт. I; ближе к ней — на черт. II; на линии OO_1, — на черт. III; а на черт. IV ее и вовсе нет.

В четвертом случае, на черт. IV, окружности не встречаются, потому что оба радиуса их вместе (OC и O_1C_1) меньше расстояния между их центрами OO_1, или на числах - сумма радиусов 1,2 см. + 1 см. меньше 2,4 см.

В третьем случае, черт. III, окружности касаются, так как их радиусы ($OC = 1{,}4$ см. и $O_1C = 1$ см.) вместе составляют расстояние $OO_1 = 2{,}4$ см., равное расстоянию между их центрами.

В первых двух случаях (черт. I и II) сумма радиусов кругов $OC + O_1C$ больше расстояния OO_1 между центрами этих кругов.

Итак, когда две окружности лежат на плоскости и сумма их радиусов меньше расстояния между центрами, то они пересекаются в двух точках.

Когда сумма радиусов окружностей равна расстоянию между их центрами, то они касаются.

Когда сумма радиусов окружностей меньше расстояния между их центрами, то они лежат одна вне другой.

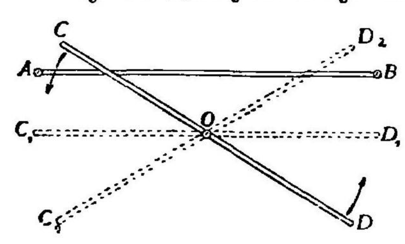
2. Теперь мы видим, что не из всяких трех отрезков прямой можно составить треугольник. Если сумма двух более коротких отрезков равна третьему или меньше третьего, то нельзя построить треугольника, у которого эти отрезки служили бы сторонами.

Задача 55. Можно ли построить треугольник, у которого стороны были бы равны 10 см., 6 см. и 5 см.? 10 см., 6 см. и 3 см.? 8 см., 4 см. и 4 см.?

5. Положение двух прямых линий. Угол.

Две прямые линии на плоскости. Наблюдая прямые линии на ровной, плоской поверхности земли, напр., рельсы, края дороги, межи нив, мы замечаем, что иногда эти прямые идут рядом, не сходясь и не расходясь, как, напр., рельсы железнодорожного пути; иногда же они сходятся, как рельсы двух пересекающихся железных дорог.

Пусть две узкие бумажные полосы AB и CD (черт. 36), изображающие две неограниченные прямые линии, лежат в одной плоскости. Закрепим полосу AB двумя кнопками, а полосу CD одной кнопкой O. Эти прямые составляют угол. Будем теперь вращать полосу CD вокруг точки O в сторону, указанную стрелкой. Точка пересечения полосок будет уходить влево все дальше и дальше. Наступит момент, когда прямая CD примет такое положение C_1D_1, при котором прямые AB и C_1D_1 не будут пересекаться, как бы далеко мы их ни продолжали в обе стороны. Такие прямые называются параллельными.



Черт. 36. Прямая AB—неподвижна. CD вращается вокруг O. AB и CD пересекаются. AB и C_1D_1 -- параллельны.

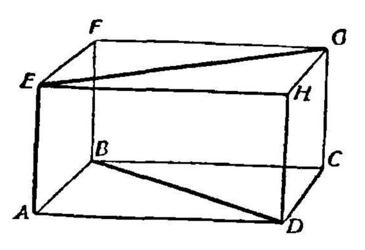
Если прямую CD будем продолжать вращать все в ту же сторону, то параллельность нарушится, и прямые пересекутся уже справа.

Следовательно, беспредельные прямые, лежащие на одной плоскости, пересекаются или не пересекаются. Если они пересекаются, то образуют угол. Если не пересекаются, то они параллельны.

То, что мы сейчас говорили, относится к неограниченным прямым. Отрезки же могут быть не параллельны и не пересекаться.

Всякие ли две прямые лежат в одной плоскости? Иначе говоря, чрез всякие ли две прямые можно вообразить плоскость? На черт. 37 изображен прямоугольный брус (параллелепипед), составленный из палочек. Вместо него можно вообразить себе комнату. На основаниях его проведены диагонали EG и BD. Вообразим себе

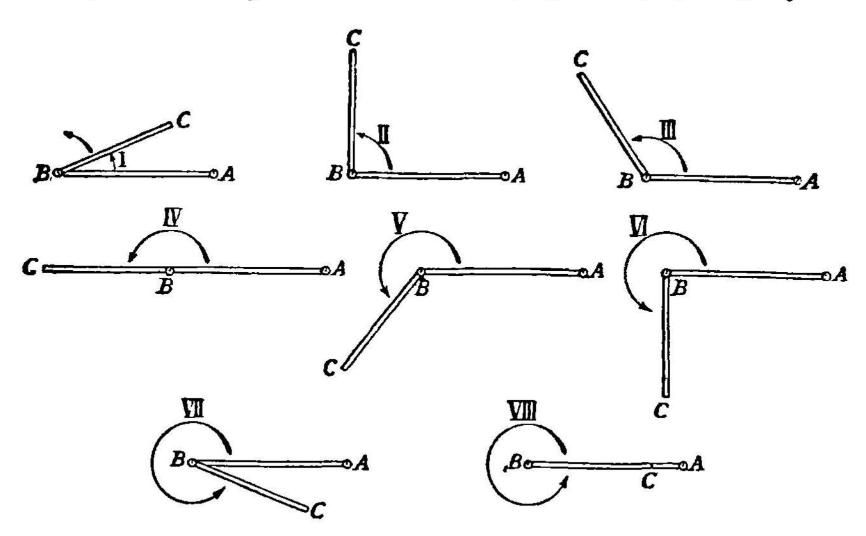
плоскость, на которой лежит прямая EG; напр., лист бумаги, подвешенный на нити EG. Будем теперь эту плоскость поворачивать вокруг прямой EG. Мы не найдем такого положения ее, чтобы прямая BD оказалась так же лежащей на этой плоскости. В этом случае говорят, что **прямые линии** BD и EG **не лежат в одной плоскости**. Эти линии не пересекаются и в то же время не параллельны. Параллельные же прямые всегда лежат на одной и той же плоскости.



Черт. 37. Прямые EG и BD не лежат в одной плоскости.

Задача 56. Две натянутые длинные бечевки (натянуты четырьмя учениками) расположить так, чтобы они не могли лежать на одной плоскости! Чтобы они могли лежать на одной плоскости и не были параллельны! Чтобы они были параллельны!

Образование угла. Угол ABC (черт. 38, I) образуется



Черт. 38. Углы.

двумя прямыми линиями, выходящими из одной точки B. Прямые линии BA и BC, образующие угол, с одной стороны ограничены, имеют общий конец B; с другой же стороны они неограничены.

Прикрепим к доске кнопкой две полоски, которые будут обозначать стороны угла. Одна из них *BA*—неподвижна, другая же *BC* может вращаться вокруг точки *B*. Сдвинем их вместе. Повернем несколько сторону *BC*; получим острый угол I. Поворачивая ту же сторону далее, можем получить прямой угол II, затем тупой—III. Когда стороны *BA* и *BC*, выходя из точки *B* в противоположные стороны, составят прямую линию, то получаем угол IV, который будет равен двум прямым углам, сложенным вместе. Угол V больше двух прямых углов. Угол VI равен трем прямым углам. Угол VII больше трех прямых углов; угол VIII равен четырем прямым углам.

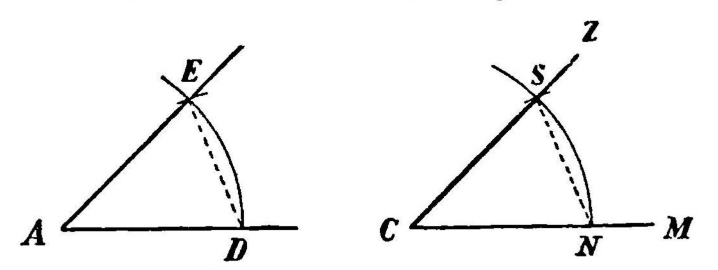
Задачи. 57. Повернуть стрелку циферблата часов на угол, меньший прямого! На прямой угол! На два прямые угла! На угол, больший трех прямых углов!

На какой угол повернулась часовая стрелка, начиная с полудня до 6 час.? До 9 час.? До $7^{1}/_{2}$ час.? До $10^{1}/_{2}$ час.? До полночи?

58. Показать в классе угол, равный 3 прямым углам. Начертив угол в 3 прямых угла на бумаге, затушевать ту часть плоскости, которая лежит между его сторонами!

59. Измерить на черт. 8 (стр. 9) угол 4.

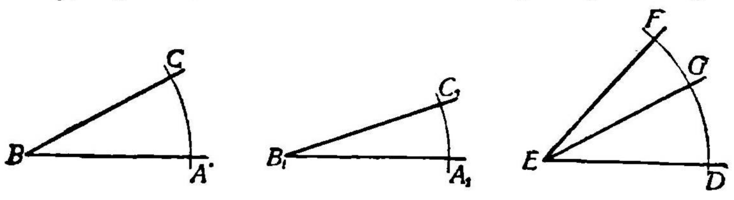
Построение угла, равного данному. На прямой *CM* при точке *C* (черт. 39) построить угол, равный данному углу



Черт. 39. Построение угла равного данному углу.

EAD. Около точек *A* и *C* опишем одним и тем же радиусом дуги *ED* и *SN*. Раздвинув острия циркуля на расстояние *ED*, поставим одно из них в точку *N*, а другим отметим точку *S*. Проведем прямую из точки *C* через точку *S*. Воспользовавшись третьим признаком равенства треугольников (стр. 27), убедиться в равенстве углов *ZCM* и *EAD*.

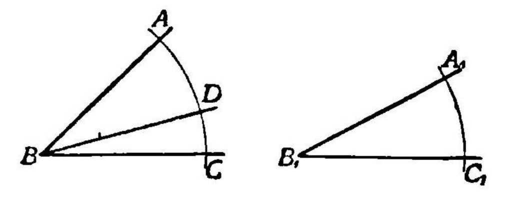
Сложение углов. Чтобы сложить углы ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 40), проведем одним и тем же радиусом дуги AC,



Черт. 40. Сложение углов.

A_1C_1 и DF, центры которых находятся в точках B, B_1 и E. Построим $\angle DEG$, равный углу ABC и $\angle GEF$, равный $\angle A_1B_1C_1$. Угол DEF есть сумма углов ABC и $A_1B_1C_1$.

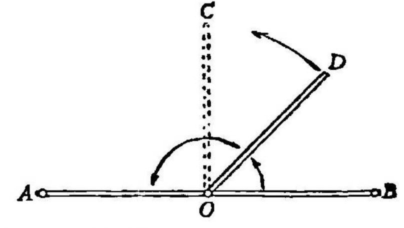
Вычитание углов. Чтобы вычесть из угла ABC угол $A_1B_1C_1$, построим на прямой AB угол ABD, равный углу $A_1B_1C_1$, как показано на черт. 41. Угол DBC есть разность углов ABC и $A_1B_1C_1$.



Черт. 41. Вычитание углов.

Смежные углы. Две узкие бумажные полоски AB и OD расположим так, как на черт. 42. Углы BOD и DOA, которые образует прямая OD при встрече с прямой AB, называются с м е ж н ы м и.

Углы BOD и DOA вместе составляют один угол BOA, который может вместить в себе два прямых угла. Они отмечены с помощью полоски OC. Следовательно сумма смежных углов BOD и DOA равна двум прямым углам.



Черт. 42. Сумма смежных углов равна двум прямым углам или 180°.

Поворотим полоску DO так, чтобы она легла вдоль прямой OB. Тогда угол BOD равен нулю, а угол DOA— двум прямым углам. Будем вращать сторону DO в направлении, указанном стрелкой. Угол BOD—будет некоторое время острым, а угол DOA тупым. Первый увели-

чивается, второй уменьшается; сумма же их равна двум прямым углам.

Но вот прямая DO заняла положение перпендикуляра CO. Оба угла DOB и DOA сделались прямыми и равными. Значит прямой угол есть один из двух равных смежных углов.

Поворачиваем сторону DO далее. Угол BOD становится тупым, а угол DOA — острым. Вместе оба угла равны двум прямым углам. Будем вращать DO и далее, пока угол BOD не станет равным двум прямым углам, а угол DOA не обратится в нуль.

Сумма смежных углов равна двум прямым углам или 180°. Когда один из них острый, другой тупой. Когда один из смежных углов прямой, то и другой угол — прямой.

Задачи. 60. Начертить угол. Продолжить одну из его сторон. Показать смежные углы.

Продолжить другую сторону угла. Показать все пары смежных углов. Сколькими прямыми углами могут быть покрыты два смежных угла? Сколько градусов заключает их сумма?

61. Начертить два угла, имеющих общую вершину и общую сторону, но не смежных.

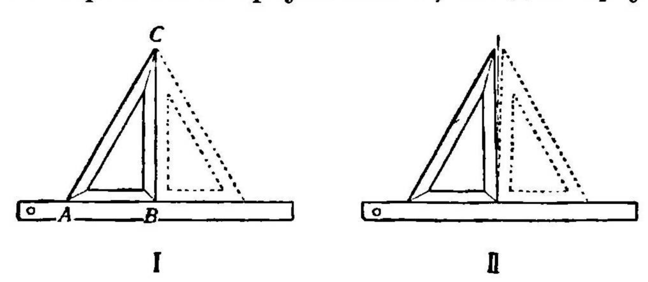
62. Бывают ли смежными два острых угла? два прямых угла? два тупых угла?

63. Расположить углы $AOB = 45°$ и $BOC = 135°$ так, чтобы сторона их BO была общая, а углы были смежными! чтобы сторона их BO была общей, а углы AOB и BOC не были смежными.

64. Сколько градусов имеет угол, смежный с углом в 30°?

65. Найти смежные углы, если их отношение равно 5! 4! $^1/_2$! $^1/_3$! $^2/_3$! Составить уравнения.

Проверка чертежного треугольника. Чтобы проверить угол ABC чертежного треугольника, кладем треугольник



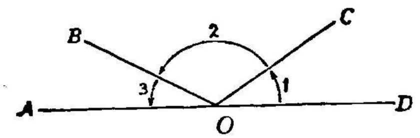
Черт. 43. Проверка чертежного треугольника.

на бумагу и придвигаем к нему линейку, как на черт. 43,

Проведя вдоль ребра *BC* черту, переворачиваем его на другую сторону. Новое его положение отмечено точечными линиями на чертеже. Проводим вдоль *BC* снова черту. Если угол *ABC* прямой, то обе черты сольются (черт. I).

Если угол *ABC* непрямой, то эти черты разойдутся (черт. II).

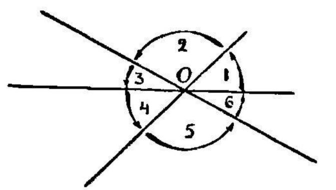
Углы, лежащие по одну сторону прямой. Углы 1, 2 и 3-й расположены по одну сторону прямой линии *AD* вокруг общей их вершины *O* (черт. 44). Их сумма *AOD* равна двум прямым углам.



Черт. 44. Сумма углов 1, 2 и 3, расположенных вокруг общей вершины по одну сторону прямой, равна двум прямым углам.

Задача 66. Начертить по одну сторону прямой 3 равных угла. Сколько градусов имеет каждый из них?

Углы, лежащие вокруг точки. Углы 1, 2, 3, 4, 5 и 6-ой расположены на плоскости вокруг точки *O* (черт. 45). Они могут быть покрыты 4-мя прямыми углами. Значит, сумма их равна четырем прямым углам.



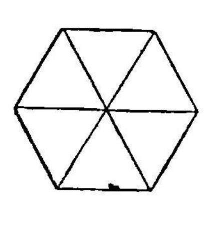
Черт. 45. Сумма углов 1, 2, 3, 4, 5, 6, расположенных вокруг точки, равна четырем прямым.

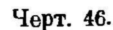
Задачи. 67. Паркет составлен из равных равносторонних треугольников. Вокруг точки располагаются своими вершинами 6 таких треугольников (черт. 46). Сколько градусов заключает каждый угол треугольника?

68. Основания сотовых ячеек—правильные шестиугольники. Вокруг точки (черт. 47) помещаются 3 угла этих шестиугольников. Сколько градусов заключает угол правильного шестиугольника?

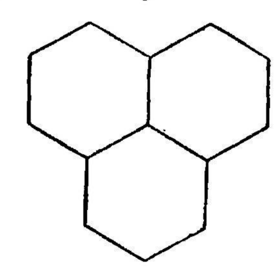
69. Сколько углов, по 45° каждый, может расположиться на плоскости вокруг точки?

70. Углы, по 50° каждый, располагаются на плоскости своими вершинами в одной точке. Покроют ли они всю плоскость?





Черт. 46.

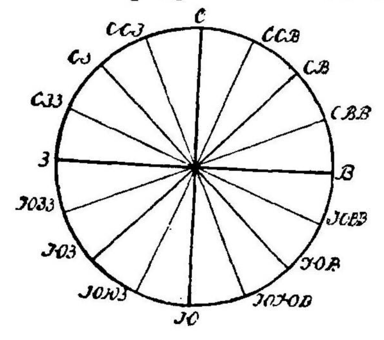


Черт. 47.

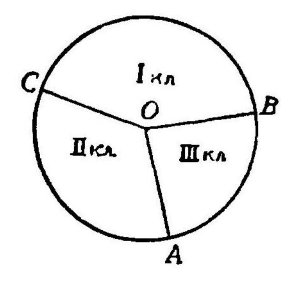
71. На черт. 48 указаны направления стран света, которыми определяются направление ветра и курс корабля. На сколько

градусов повернулся ветер, если он дул с Севера, а затем стал дуть с Северо-Востока?

Корабль шел на Юг, затем взял путь на Юго-Юго-Запад. На сколько градусов взял он поворот?



Черт. 48. Страны света и румбы.



Черт. 49.

Судно шло на С, затем сделало поворот на СВВ, далее на ЮВ, еще на Ю, и наконец на ЮЗЗ. На какой угол оно повернулось по отношению к первоначальному курсу?

72. Разделить окружность с помощью транспортира на 5 равных частей.

Круговой сектор. Круговой сектор есть фигура, составленная дугой *AB* и двумя радиусами *OA* и *OB* (черт. 49). На чертеже круг разделен на 3 сектора.

Изобразим с помощью круга и его секторов число учеников в нашей школе и число их в каждом классе. У нас три класса. В первом классе 30 учащихся, во втором 25 и в третьем 17. В трех классах 72 ученика. Если представим 72—число детей в школе в виде круга, то на одного учащегося придется часть круга, или сектор, заключающий 5°, ибо 360° : 72=5°. Числа учеников 1-го, 2-го и 3-го классов изобразятся секторами, заключающими 150°, 125° и 85° (черт. 49).

Задачи. 73. В шестиклассной школе учащихся в I классе 40, во II—37, в III—38, в IV—30, в V—25 и в VI—18. Изобразить распределение учащихся по классам в виде секторов.

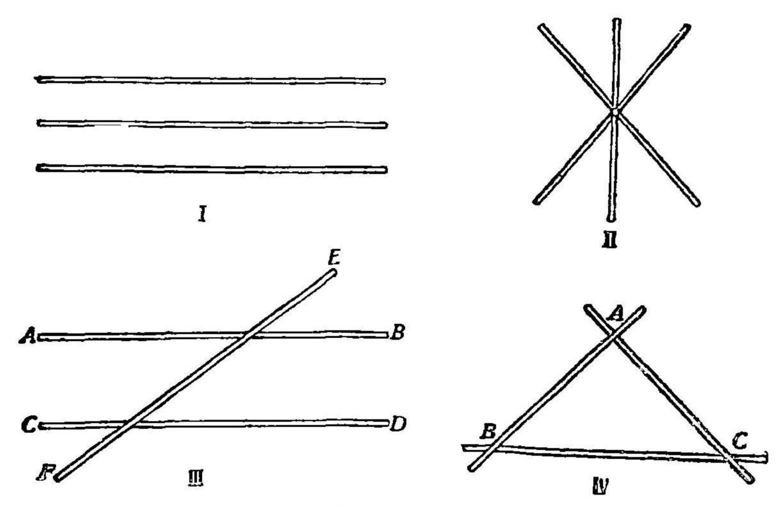
74. До Революции население России по роду занятий делилось на следующие группы: сельским хозяйством занимались 75% всего населения, фабрично-заводской промышленностью 10%, торговлей 4%, в личном услужении было 4%, в прочих занятиях 7%. Представить эти числа наглядно с помощью секторов круга.

75. Разделить круг на три каких-либо сектора. Вычислить, сколько процентов всего круга составляет каждый сектор?

6. Положение трех прямых на плоскости.

В скольких точках могут пересекаться три прямые линии, лежащие на плоскости?

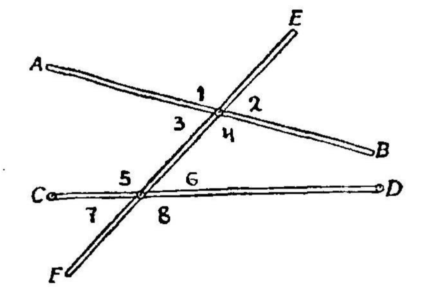
Положим перед собой на столе три узких бумажных полоски, которые будут обозначать прямые линии. Будем воображать их себе неограниченными. Расположим их так, чтобы они не пересекались, как бы далеко они ни были продолжены. Три прямые параллельны (черт. 50, I).



Черт. 50. Положение трех прямых на плоскости: I — нет точек пересечения, II—одна, III—две, IV— три точки пересечения.

Расположим их так, чтобы они пересекались в одной точке (черт. II), в двух точках (черт. III) и в трех точках (черт. IV). Когда три прямые пересекаются в трех точках (черт. IV), то они образуют треугольник.

Соответственные и накрест-лежащие углы. 1. Бумажные полоски *AB*, *CD* и *EF* (черт. 51) обозначают прямые линии. Углы 2 и 6 называются соответственными.

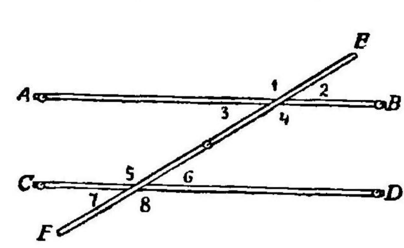


Черт. 51. Прямые *AB* и *CD* при продолжении пересекаются справа. Уг. 2 больше угла 6.

2. Прямые *AB* и *CD*, которые мы будем считать неограниченными, как видим, пересекутся вправо от секущей. Будем теперь прямую *AB* поворачивать в сторону, обратную вращению часовой стрелки, и в то же время следить за соответственными углами 2 и 6. Угол 2-ой больше угла 6-го. По мере вращения прямой *AB*, точка пересечения обеих прямых убегает вправо, а углы 2-ой и 6-ой выравниваются. И когда прямая *AB* станет параллельной прямой *CD*, то угол 2 сделается равным углу 6 (черт. 52).

Будем прямую *AB* продолжать вращать все в ту же сторону, воображая обе прямые неограниченными. Пересечение их уже будет слева; уг. 2-ой сделается меньше угла 6-го. По мере приближения точки пересечения прямых к секущей угол 2-ой становится все меньше и меньше.

Итак, мы наблюдали момент, когда прямые *AB* и *CD* были параллельны (черт. 52). В этот момент угол 2-ой равнялся углу 6-ому. Остановимся еще раз на этом случае. Закрепим секущую *EF* в одной точке. Будем вращать секущую то в одну, то в другую сторону. Углы 2-й и 6-й то увеличиваются, то уменьшаются, оставаясь равными.

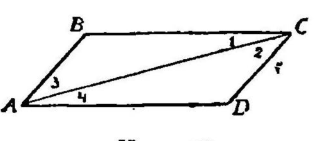


Черт. 52. Прямые *AB* и *CD* параллельны; $\angle 2 = \angle 6$.

Когда прямые параллельны, то соответственные углы равны.

3. Так как уг. 3 равен всегда углу 2, то и об углах 3 и 6-м можно сказать то же: $\angle 3 = \angle 6$ (черт. 52). Эти углы называются накрест-лежащими.

Когда прямые линии параллельны, то накрест-лежащие углы равны.



Черт. 53.

Задачи. 76. $\angle 2$ на чертеже 52 равен 30^0. Найти все другие углы на том же чертеже.

77. У фигуры (черт. 53) *ABCD* прямые *AD* и *BC*, а также прямые *AB* и *CD* параллельны. Какие из углов 1, 2, 3 и 4 равны между собой и почему?

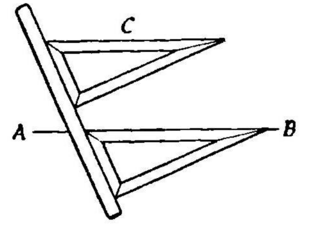
Построение параллельных прямых. 1. Положив на бумагу линейку, придвинем к ней плотно чертежный треугольник (как на черт. 54, I). Если передвигать треугольник вдоль линейки, то угол 1, составленный ребром *AB* треугольника и ребром линейки, остается неизменным, а потому сохраняется один и тот же наклон ребра *AB* к линейке. Если мы проведем вдоль ребра треугольника *AB* несколько прямых линий *IK*, *LM*, *NO*, (черт. 54, II), то они будут параллельны.

Черт. 54. I—черчение параллельных линий. II—соответственные углы 3, 4 и 5—равны: прямые *IK*, *LM* и *NO*—параллельны.

Итак, когда соответственные углы 3, 4 и 5 равны, то прямые линии *IK*, *LM* и *NO* параллельны.

Задача 78. Через точку *C* провести прямую, параллельную данной прямой *AB* (черт. 55).

Указание: треугольник и линейку расположить, как показано на черт. 55.



Черт. 55. Через точку провести прямую, параллельную данной прямой.

2. Чтобы убедиться в том, что прямые *AB* и *CD* (черт. 52) параллельны, можно сравнить соответственные углы 2 и 6: если они равны, то линии *AB* и *CD* параллельны. Но 2-й и 3-й углы всегда равны. Поэтому, если окажется, что углы 3 и 6 равны, то это будет признаком того, что прямые линии параллельны.

Итак, когда накрест-лежащие углы 3-ий и 6-ой равны, то прямые *AB* и *CD* параллельны.

Задачи. 79. Положив линейку на бумагу, приложить к ней треугольник стороной прямого угла (катетом). Передвигая треугольник вдоль линейки, провести несколько прямых по другой стороне прямого угла (по другому катету). Как расположены эти прямые относительно линейки? друг относительно друга?

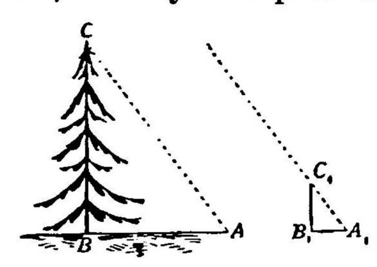
80. Дана прямая линия. Начертить прямую, параллельную к ней, на расстоянии 2 см. от нее. Сколько таких прямых можно начертить?

81. Две прямые AB и AD перпендикулярны друг к другу. Начертить все точки, которые лежат на расстоянии 0,7 см. от прямой AD! На расстоянии 1,2 см. от прямой AB!

Отметить точку, которая находится на расстоянии 0,7 см. от прямой AD и 1,2 см. от прямой AB.

82. На полу классной комнаты отметить мелом точку. Какими двумя расстояниями можно определить ее положение?

Измерение высоты предмета по его тени. BC — предмет, высоту которого надо узнать (черт. 56). CA — направление солнечных лучей. AB — тень. Воткнув отвесно в землю палку B_1C_1, высотой в 1 саж., получим тень B_1A_1. Сравним теперь треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. $\angle B = \angle B_1$. Лучи AC и A_1C_1 — параллельны и потому одинаково наклонены к горизонтальной поверхности земли; поэтому углы A и A_1 равны, и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ — подобны. Значит, во сколько раз тень AB больше тени A_1B_1, столько раз сажень поместится в высоте дерева. Таким образом, разделив длину тени AB на длину тени A_1B_1, мы получим высоту дерева в саженях.



Черт. 56. Измерение высоты дерев по длине его тени.

7. Сумма углов треугольника.

1. Даны два угла треугольника $A = 50°$ и $C = 60°$. Построив по этим данным треугольник, найти третий его угол B (черт. 27, стр. 22).

По данным двум углам мы можем построить несколько неравных между собою треугольников (черт. 27). У каждого из них угол B получается сам собою: выбрать его по своему желанию мы не можем. Отчего же у всех этих треугольников третьи углы получаются вполне определенные и, если судить на глазомер, между собою равные? Ответ на этот вопрос будет дан дальше. Напомним, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ получаются подобные.

2. Когда мы строили треугольник по данной стороне и двум прилежащим к ней углам, то мы утверждали,

что этих данных достаточно, чтобы получился вполне определенный треугольник. Теперь нам надо ответить еще на другой вопрос: можем ли мы эти два угла выбрать произвольной величины? Напр., может ли существовать треугольник, у которого два угла прямые или один угол равен 80°, а другой 120°?

Измерение углов треугольника. 1. Начертив несколько различных по виду и величине треугольников, измерим транспортиром углы каждого из них как можно точнее, стараясь отсчитывать даже половины градуса. Сложив углы каждого треугольника, найдем, что сумма их или точно равна 180° или близка к этому числу.

2. Точны ли наши измерения? Возьмем один и тот же угол, и пусть все ученики класса измерят его про себя транспортиром как можно тщательнее, стараясь оценить на-глаз даже $1/2^0$, если она будет. Рассматривая результаты и исключая из них явно ошибочные, небрежные, мы видим, что они отличаются между собою менее чем на 1°. Будем поэтому считать, что, измеряя угол транспортиром, мы можем сделать ошибку, меньшую 1°.

Положим, что углы треугольника оказались равными 53°, 78° и 50°,5. Каждое из этих чисел есть приближенное число с ошибкой меньшей 1°. Сумма их равна 181°,5. Найдем границу ошибки этого числа.

Допустим, что углы треугольника все оказались бы на 1° меньше; тогда их сумма была бы 178°,5. Если бы, наоборот, они оказались на 1° больше, то их сумма была бы 184°,5. Принимая сумму углов треугольника равной 181°,5, мы рискуем ошибиться, но ошибка будет меньше 3°, ибо

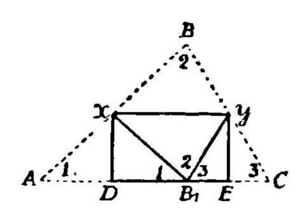
$$181^\circ{,}5 - 178^\circ{,}5 = 3^\circ,$$

$$\text{и } 184^\circ{,}5 - 181^\circ{,}5 = 3^\circ.$$

Следовательно, число 181°,5 есть приближенное число с ошибкой меньшей 3°, и точная сумма углов треугольника больше 178°,5 и меньше 184°,5. Какова она, мы узнаем дальше.

Найти сумму углов треугольника, не измеряя их. Сделаем бумажную модель треугольника (черт. 57). Найдя средины x и y боковых сторон треугольника AB и BC, соединим их прямой xy, которая, как в этом можно убедиться на опыте, пойдет параллельно основанию и будет лежать на равных расстояниях от вершины треугольника и от его основания. Действительно, при перегибании треугольника по прямой xy, вершина B упадет на осно-

вание AC, в точку B^1 Треугольники AxB^1 и CyB^1—равнобедренные. Перегнув их пополам, можно слить сторону Ax со стороной B^1x, и сторону Cy со стороной B^1y. Тогда три угла 1, 2 и 3 треугольника расположатся вокруг общей вершины и по одну сторону прямой AB_1C. Сумма их равна двум прямым углам или 180°.



Черт. 57. Сумма углов 1, 2 и 3 треугольника равна двум прямым углам.

Доказательство. 1. Чтобы ответить на вопрос, чему равна сумма углов треугольника, мы измеряли его углы и затем их складывали. Так как измерения, производимые даже очень умелыми людьми, никогда не бывают совершенно точны, то и сумма, полученная нами, была лишь приблизительна, близкая к 180°.

Мы пытались далее узнать сумму углов треугольника путем перегибания. Но и тут при вырезывании и перегибании могли получиться небольшие неправильности. Наконец, у нас не может быть уверенности в том, что вершина треугольника при перегибании всегда и обязательно придется на его основании.

Кроме того, мы рассмотрели только несколько треугольников и потому не знаем, чему могла бы оказаться равной сумма углов у других нерассмотренных треугольников.

Сделанные нами измерения и перегибание только навели нас на мысль, на догадку, что сумма углов треугольника равна двум прямым углам, но не давали нам полной уверенности в этом.

Чему же равна сумма углов всякого треугольника? Достоверный ответ на этот вопрос дадут только рассуждения. Эти рассуждения обыкновенно называются доказательством.

2. Чтобы сложить три угла треугольника, удобнее всего было бы перенести два из них к третьему, чтобы этот третий угол оставался на месте.

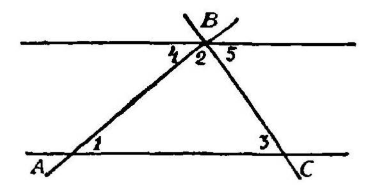
Возьмем две параллельные прямые (черт. 58). Чрез точку B, лежащую на одной из них, проведем две се-

кущие *AB* и *BC*, которые вместе с прямой *AC* образуют треугольник *ABC*.

Чему равна сумма углов этого треугольника?

Запишем этот вопрос так:

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = ?$$



Черт. 58. Сумма углов 1, 2 и 3 треугольника равна двум прямым углам.

$\angle 1 = \angle 4$, ибо эти углы накрест-лежащие при параллельных прямых. По той же причине $\angle 3 = \angle 5$. Таким образом углы 1-й и 3-й оказались как бы перенесенными к точке *B*. Сумма углов 4, 2 и 5 равна двум прямым углам или 180^0, ибо эти углы лежат по одну сторону прямой и других углов на этой же стороне прямой нет:

$$\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180^0.$$

Вместо этого равенства можем написать такое

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^0,$$

ибо $\angle 4 = \angle 1$ и $\angle 5 = \angle 3$.

Итак, сумма углов треугольника *ABC* равна двум прямым углам или 180^0.

Но в каждом ли треугольнике сумма углов равна 180^0? Какой бы треугольник мы ни взяли, мы можем чрез вершину его *B* провести прямую, параллельную основанию *AC*, и повторить все предыдущие рассуждения слово в слово.

Итак, сумма углов каждого треугольника равна двум прямым углам или 180^0.

Задачи. 83. Два угла треугольника равны 60^0 и 50^0. Вычислить третий угол. Ответить на вопрос, предложенный на стр. 42: отчего задача эта вполне определенная?

84. В прямоугольном треугольнике острый угол равен 60^0. Чему равен другой острый угол?

Углы треугольника. Теперь мы можем ответить и на другой вопрос, предложенный на стр. 43: можно ли при построении треугольника задать какие угодно два угла его?

Мы уже знаем, что сумма углов треугольника равна двум прямым углам или 180^0. Поэтому, если бы мы вы-

брали для треугольника такие два угла или такие три угла, сумма которых оказалась бы больше 180° или равна 180°, то треугольник с такими углами не мог бы существовать. Так, не может быть треугольника, у которого каждый угол равнялся бы 70°, ибо сумма их оказалась бы равной 210°.

Не может быть треугольника с двумя прямыми углами, ибо сумма двух этих углов равнялась бы 180° и на долю третьего ничего из 180° не оставалось бы.

Не может быть треугольника и с двумя тупыми углами, ибо сумма двух этих тупых углов больше двух прямых углов.

85. Чему равна сумма двух острых углов прямоугольного треугольника?

86. Возможен ли треугольник, у которого углы равны 70°, 70°, 40°? 70°, 110°, 10°? 60°, 60° и 61°? 95° и 91°? 135° и 45°?

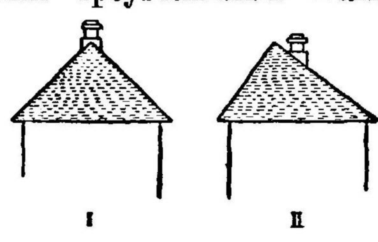
87. Углы треугольника a, b, c. Написать, чему равна их сумма.

88. В прямоугольном треугольнике один из острых углов 35°. Обозначив другой угол через x, написать уравнение. Вычислить x.

89. Один угол треугольника неизвестен. Второй на 5° больше первого, третий на 5° больше второго. Обозначив первый угол через x, составить уравнение и вычислить x.

8. Равнобедренный и равносторонний треугольник.

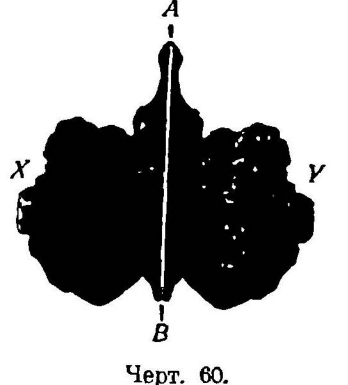
Рассмотрим подробнее равносторонний и равнобедренный треугольники. Ведь эти треугольники так часто попадаются как украшения на зданиях, на коврах, вышивках и т. д. Они приятнее для глаза чем разносторонние треугольники. Сравните скаты у крыш домиков (черт. 59, I и II).



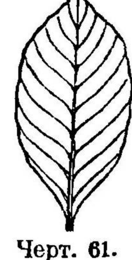
Черт. 59. I—Скат крыши равнобедренный треугольник. II — Скат крыши неравнобедренный треугольник.

Симметричные фигуры. На кусок бумаги поместим каплю чернил и затем перегнем его так, чтобы получился отпечаток этого пятна (черт. 60). Расправив бумагу, мы заметим, что по обе стороны сгиба AB расположились совершенно равные части пятна X и Y, при этом они расположились относительно сгиба одинаково.

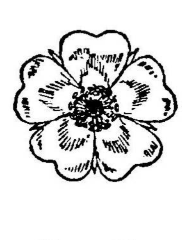
Фигуры X и Y—симметричны относительно прямой линии AB, которая называется осью симметрии. В живой и неживой природе



Черт. 60.

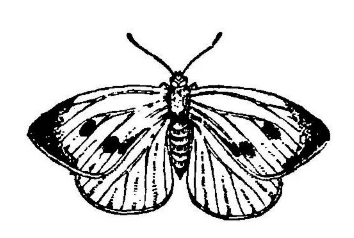


Черт. 61.

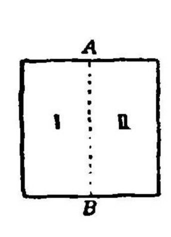


Черт. 62.

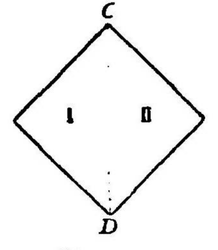
симметричные фигуры встречаются весьма часто. Крылья бабочки, снежинки, части листка, цветки—фигуры сим-



Черт. 63.



Черт. 64.



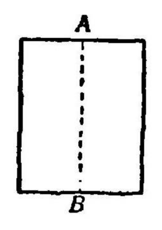
Черт. 65.

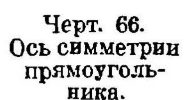
Оси симметрии квадрата.

метричные (черт. 61, 62, 63). И люди, делая разные полезные для себя предметы и украшения, очень часто пользуются симметричными фигурами.

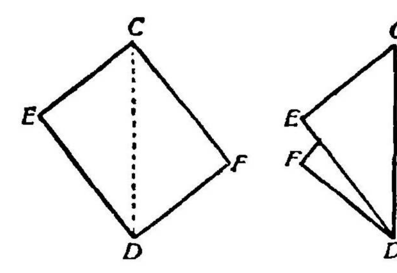
Задачи. 90. Вырезав из бумаги квадрат, найти в нем все оси симметрии (черт. 64—65).

91. Вырезав из бумаги прямоугольник, найти в нем все оси симметрии (черт. 66).





Черт. 66. Ось симметрии прямоугольника.



Черт. 67. Диагональ не есть ось симметрии прямоугольника.

92. Можно ли диагональ прямоугольника назвать его осью симметрии (черт. 66)?

Симметричные точки. Поставив на листе бумаги чернилами точку A (черт. 68), перегнем его по линии ZM. Получим отпечаток A_1 точки A. Точки A и A_1 симметрично расположены относительно оси ZM.

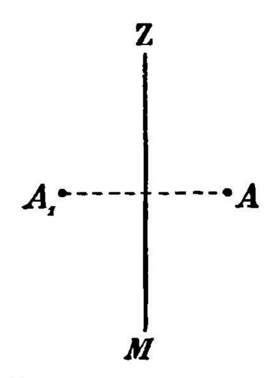


Рис. 68. Точки A и A_1 симметричны относительно оси ZM.

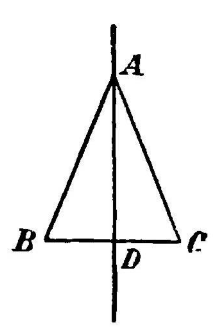
Соединим эти точки прямой AA_1. Эта прямая перпендикулярна к ZM. Расстояния точек A и A_1 от оси ZM равны.

Задачи. 93. Начертить на куске бумаги чернилами отрезок прямой и согнуть этот кусок, чтобы получился отпечаток отрезка. Как можно назвать отрезок и его отпечаток?

94. Нарисовав бабочку на бумаге, поставить зеркало вдоль ее оси симметрии, перпендикулярно к бумаге. Симметричны ли нарисованная часть бабочки и ее зеркальное изображение?

95. Как получить с помощью зеркала из половины квадрата целый квадрат?

Симметрия в равнобедренном треугольнике. Начертив равнобедренный треугольник на бумаге, вырежем его. Перегнем этот треугольник так, чтобы обе части его совпали. Развернем его снова (черт. 69): линия изгиба AD служит его осью симметрии.



Черт. 69. Прямая AD – ось симметрии равнобедренного треугольника ABC.

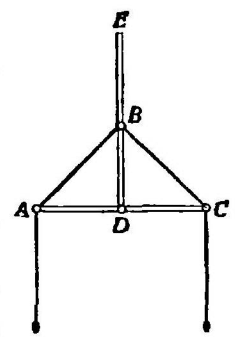
1. Так как углы ADB и CDA равны, то ось симметрии AD перпендикулярна к основанию равнобедренного треугольника и потому есть его высота.

В равнобедренном треугольнике ось симметрии и высота— одна и та же линия.

2. Высота равнобедренного треугольника делит его основание пополам, так как при перегибании треугольника по высоте отрезки основания BD и CD совмещаются.

3. При перегибании равнобедренного треугольника по высоте, углы его при основании совмещаются. Значит, **углы при основании равнобедренного треугольника равны.**

Это свойство углов равнобедренного треугольника удобно наблюдать на такой модели. Укрепим на классной доске кнопками две бумажные полоски *AC* и *DE* (черт. 70), при этом полоску *DE* перпендикулярно к полоске *AC* в ее средине. На полоске *DE* где угодно воткнем кнопку и перекинем чрез нее и чрез кнопки *A* и *C* нить, натянутую грузиками. В какой бы точке перпендикуляра *DE* мы не воткнули кнопку *B*, треугольник *ABC* будет равнобедренный, ибо любая точка, взятая на этом перпендикуляре, одинаково удалена от точек *A* и *C*. Будем теперь кнопку *B* передвигать вдоль перпендикуляра *DE* вниз, следя все время за углами *A* и *C*: оба угла одновременно уменьшаются, оставаясь, как видно на-глаз, равными. Когда точка *B* совпадет с точкой *D*, боковые стороны треугольника *ABC* сольются с основанием *AC*. Углы *A* и *C* будут равны нулю.



Черт. 70. Подвижная модель равнобедренного треугольника.

Будем теперь кнопку *B* поднимать вверх: оба угла при основании равнобедренного треугольника одновременно увеличиваются, оставаясь равными. Вообразим, что перпендикуляр *DE* тянется беспредельно вверх, и по нему вверх движется вершина *B* равнобедренного треугольника. Углы *A* и *C* будут становиться все больше и больше и все меньше и меньше будут отличаться от прямого угла. Когда прямые *AB* и *CB* станут перпендикулярны к основанию, то они будут параллельны. И мы вместо равнобедренного треугольника будем иметь отрезок *AC* и на концах его две перпендикулярные к нему прямые линии.

Задачи. 96. Вычислить углы при основании равнобедренного треугольника, если угол при вершине его равен 80°.

97. Сколько градусов имеют углы равнобедренного прямоугольного треугольника?

98. Боковая сторона равнобедренного треугольника b, периметр его p. Написать, чему равно его основание?

Основание равнобедренного треугольника a, периметр p. Чему равна боковая его сторона?

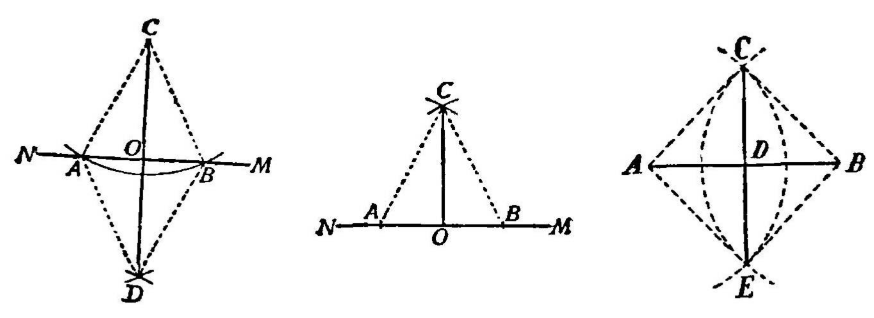
Боковая сторона равнобедренного треугольника b, основание a. Чему равен периметр p?

99. Воспользоваться формулами предыдущей задачи для вычисления:

a, если $b = 47{,}5$ см. и $p = 137{,}3$ см.;
b, если $a = 38{,}4$ см. и $p = 123{,}8$ см.;
p, если $a = 2{,}48$ м. и $b = 3{,}75$ м.

100. Периметр равнобедренного треугольника 16,8 дм., а каждая из боковых его сторон больше основания на 2,5 дм. Приняв основание его равным x, составить уравнение и вычислить x.

Из точки, лежащей вне прямой, провести к этой прямой перпендикуляр. Дана прямая NM и точка C (черт. 71).



Черт. 71. Опускание перпендикуляра на прямую.

Черт. 72. Восстановление перпендикуляра к прямой.

Черт. 73. Деление отрезка пополам.

Требуется через точку C провести к этой прямой перпендикуляр, иначе говоря, опустить на эту прямую перпендикуляр.

Проведем дугу AB, имеющую центр в точке C. Приняв точки A и B, т.-е. точки пересечения этой дуги с прямой NM за центры, проведем одним и тем же радиусом две дуги, пересекающиеся в точке D. Прямая CD перпендикулярна к NM.

1. Убедиться в этом можно, просто глядя на чертеж: точки A и B симметричны относительно прямой CD, и потому прямая AB перпендикулярна к прямой CD.

2. Можно доказать, что CD перпендикулярна к AB. Для этого докажите:

что треугольники ACD и BCD равны;

что $\angle ACD = \angle BCD$;

что треугольник ACO равен треугольнику BCO;

что $\angle AOC = \angle BOC$.

Из точки, лежащей на прямой, провести к этой прямой перпендикуляр. Дана прямая MN и на ней точка O (черт. 72). Провести чрез эту точку прямую перпендикулярную к прямой MN, или восставить к ней перпендикуляр.

На прямой MN циркулем откладываем равные отрезки OA и OB. Приняв точки A и B за центры, проводим равными радиусами дуги, которые пересеклись бы. Пусть точка пересечения их будет C. Прямая CO перпендикулярна к прямой AB.

1. Убеждаемся в этом, глядя на чертеж: точки A и B симметричны относительно прямой CO.

2. Что прямая CO перпендикулярна к прямой AB, можно доказать.

Для этого докажите, что треугольники ACO и BCO равны и что углы AOC и BOC—равны.

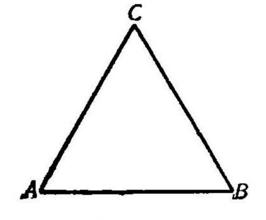
Разделить отрезок прямой пополам. Надо разделить на две равные части отрезок AB (черт. 73). Приняв точки A и B за центры, проведем две дуги, которые пересеклись бы. Пусть они пересекутся в точках C и E. Точка D, в которой пересекаются прямые CE и AB, есть средина отрезка AB.

1. В том, что отрезки AD и DB равны, убеждаемся, глядя на чертеж: точки A и B симметричны относительно прямой CE.

2. Чтобы доказать, что $AD = DB$, надо доказать, что
   треугольники ACE и BCE равны,
   углы ACD и BCD равны,
   треугольники ACD и BCD равны.

Равносторонний треугольник. 1. Взяв равносторонний треугольник ABC (черт. 74), вырезанный из бумаги, поставим его на сторону AB, которая будет его основанием. Так как стороны AC и BC равны, то этот треугольник

можно считать равнобедренным, и потому его углы A и B равны. Поставив треугольник так, чтобы сторона его BC была основанием, найдем, что углы B и C равны. Значит, у равностороннего треугольника три угла равны между собою.



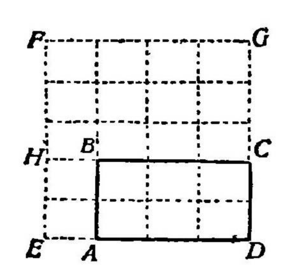
Черт. 74. Равносторонний треугольник.

2. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то угол равностороннего треугольника равен 60°

3. У равнобедренного треугольника — одна ось симметрии. У равностороннего треугольника, на какую бы сторону вы его ни поставили, боковые стороны равны. Потому равносторонний треугольник имеет три оси симметрии. Вырежьте из бумаги равносторонний треугольник и убедитесь в том, что он имеет три оси симметрии.

9. Площадь прямоугольника и треугольника.

Площадь прямоугольника. Найти площадь прямоугольника, основание и высота которого равны $AD = 3/4$ дюйма и $AB = 2/5$ дюйма. Узнаем, какую часть квадратного дюйма составляет площадь прямоугольника $ABCD$ (черт 75). Для этого построим квадрат $DEFG$, сторона которого равна 1 дюйму, а площадь 1 кв. дюйму. Так как $AD = 3/4$ дюйма, то на стороне ED квадрата отложим четверти дюйма.



Черт. 75. Основание и высота прямоугольника $\frac{3}{4}$ дюйм. и $\frac{2}{5}$ дюйм.; площадь $\frac{6}{20}$ кв. дюйм.

Так как сторона прямоугольника $AB = 2/5$ дюйм., то на стороне DG квадрата отложим пятые части дюйма. Затем разграфим квадрат на клеточки, как показано на черт. Отделим прямоугольник $EHCD$, основание ED которого равно 1 дюйму, а высота $AB = 2/5$ дюйма. Площадь его равна $2/5$ кв. дюйма. Прямоугольник $ABCD$ заключает $4/5$ прямоугольника $EHCD$. А так как площадь этого прямоугольника равна $2/5$ кв. дюйм

то чтобы найти площадь прямоугольника $ABCD$, надо взять $^3/_4$ числа $^2/_5$ кв. дюйм.

$$^2/_5 \times {^3/_4} = {^6/_{20}} = {^3/_{10}} \text{ кв. дюйм.}$$

Действительно, каждая клеточка есть $^1/_{20}$-ая часть квадрата. А прямоугольник $ABCD$ заключает 6 таких клеточек, т. е. $^6/_{20}$ квадрата.

Когда стороны прямоугольника выражены дробными числами, то площадь его находим, умножая основание на высоту, т.-е. так же, как мы ее находим, когда стороны прямоугольника были равны целым числам.

Пусть основание прямоугольника равно a единиц длины, а высота h ед. длины. Тогда площадь его S кв. единиц равна

$$S = ah,$$

где a и h могут быть и целые, и дробные числа.

Задачи. 101. На плане вашей местности или на черт. 86 (стр. 63) разыскать прямоугольник и измерить его площадь.

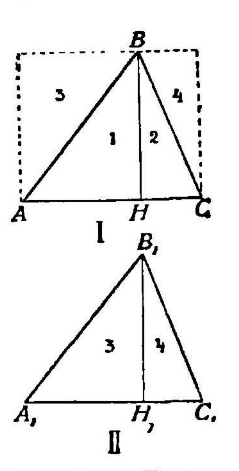
102. Вычислить площадь прямоугольника, стороны которого равны 3,75 м. и 0,27 м.! 2,25 см. и 0,84 см.!

103. Сколько потребуется черепицы на двухскатную крышу? Размеры одного ската 8,5 саж. $\times$ 4,4 саж. На квадратную сажень идет черепицы 84 штуки.

104. Сторона квадрата a ед. длины. На сколько увеличится его площадь, если сторону увеличить на 1? Составить формулу. Решить задачу, когда a=1; 2; 10; 100!

Площадь треугольника. Пусть основание треугольника a, и высота его h—целые или дробные числа. Взяв два таких треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, составим из них прямоугольник I (черт. 76), основание и высота которого a и h, а площадь ah. Площадь треугольника S равна

$$S = \frac{ah}{2}.$$



Черт. 76. Площадь треугольника. Треугольник ABC есть половина прямоугольника I. Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

Задачи. 105. Вычислить площадь треугольника, основание и высота которого равны 28,4 м. и 15,2 м.! 2,3 саж. и 1,25 саж. 12,5 см. и 7,24 см.!

106. Площадь треугольника равна 3,864 кв. м., а основание его 3,45 м. Вычислить его высоту.

107. Крыша сарая—четырехскатная. Каждый скат—треугольник, основание и высота которого 4,2 м. и 2,5 м. Сколько потребуется на окраску крыши дней работы, олифы и черляди, если на 1 кв. м. крыши надо 0,025 дня работы, 0,18 кгр. олифы и 0,09 кгр. черляди.

108. Вычислить площадь четыреугольника *ABCD*, если известно, что расстояние *AC* равно 8,4 м., высота треугольника *ABC* из вершины *B*—6,5 м., высота треугольника *ADC* из вершины *D*– 2,5 м.

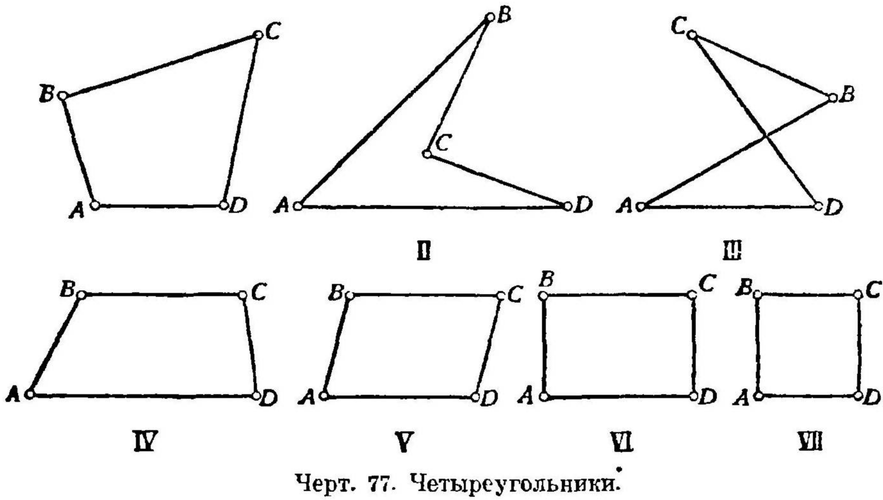
109. Сумма катетов прямоугольного треугольника 36 см. Если удлинить меньший из них на 4 см. и укоротить больший на 4 см., то площадь треугольника уменьшится на 8 кв. см. Составив уравнение, вычислить оба катета.

ГЛАВА II.

Четыреугольники.

10. Четыреугольник.

Образование четыреугольника. Отметим на плоскости какие угодно четыре точки A, B, C и D. Из них никакие три не должны лежать на одной прямой линии Соединим их отрезками прямой линии в таком порядке:



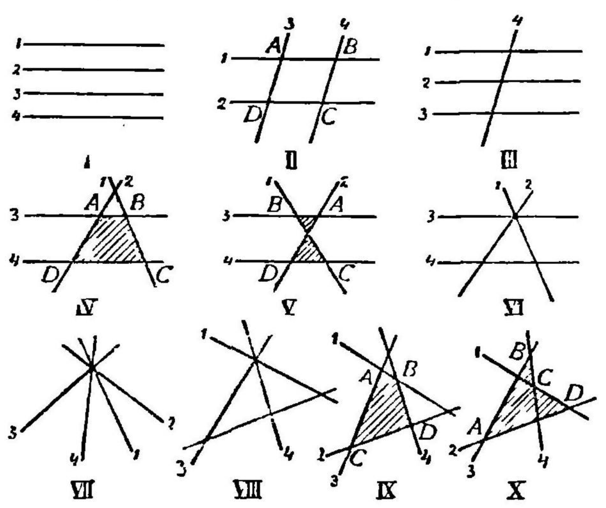
Черт. 77. Четыреугольники.

A и B, B и C, C и D, D и A (черт. 77). Мы получим четыреугольник $ABCD$.

Четыре точки A, B, C и D могут оказаться расположенными так, как на чертеже I, II, III, IV, V, VI и VII. Во всех случаях мы имеем четыреугольники.

Во скольких точках могут пересекаться четыре прямые линии, лежащие на плоскости? Прямые линии обозначим четырьмя бумажными полосками, которые отметим нумерами 1, 2, 3 и 4 (черт. 78).

1. Две из них 1 и 2—параллельны, две другие—3 и 4 тоже параллельны. Все четыре линии параллельны. Ни одной точки пересечения (фигура I).



Черт. 78. Положение четырех прямых линий на плоскости.

Две параллельные прямые 1 и 2 пересекаются двумя параллельными прямыми 3 и 4. Четыре точки пересечения *A*, *B*, *C* и *D* (фигура II).

2. Две прямые пересекаются, две другие прямые параллельны.

Фиг. III—три точки пересечения. Фиг. IV—пять точек пересечения. Фиг. V—пять точек пересечения. Фиг. VI—три точки пересечения.

3. Две прямые 1 и 2 пересекаются и две другие 3 и 4 пересекаются.

Фиг. VII — четыре прямые пересекаются в одной точке. Фиг. VIII—четыре точки пересечения. Фиг. IX—шесть точек пересечения. Фиг. X—шесть точек пересечения.

На фигурах III, IV, V, IX и X четыре прямые пересекаясь образуют четыреугольник *ABCD*.

Виды четыреугольника. Составим четыреугольник I из четырех узких бумажных полосок *AB*, *BC*, *CD* и *DA*, скрепленных кнопками (черт. 79, I)

1. Будем поворачивать сторону *BC* вокруг точки *B*, пока она не станет параллельной *AD* Получится трапеция II. Трапеция есть четыреугольник, у которого две стороны параллельны.

2. Будем теперь сторону *CD* (фиг. II) поворачивать вокруг точки *D*, пока она не станет параллельно стороне *AB*. Получим параллелограмм III.

Параллелограмм есть трапеция с параллельными боковыми сторонами.

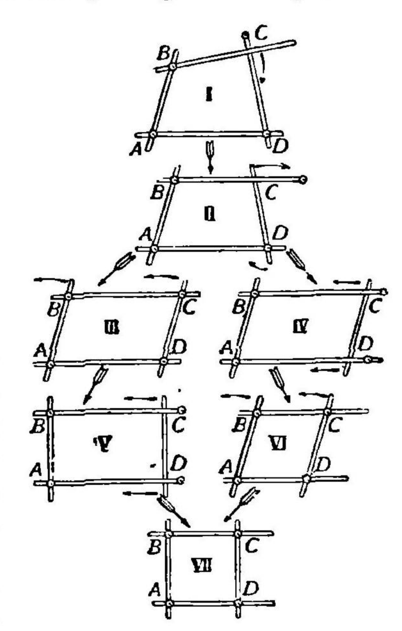
Иначе, параллелограмм есть четыреугольник, у которого четыре стороны попарно параллельны.

3. Взяв параллелограмм за вершины *B* и *C*, выпрямим его, т.-е. сделаем так, чтобы боковые стороны *AB* и *DC* были перпендикулярны к основанию *AD*. Получим прямоугольник V. Значит, прямоугольник есть прямоугольный параллелограмм.

4. Вернемся снова к параллелограмму IV. Будем в нем перемещать сторону *CD* так, чтобы она оставалась параллельной стороне *BA*, пока стороны *AD* и *AB* не станут равны. Получим фигуру VI, называемую ромбом. Ромб есть равносторонний параллелограмм.

5. Будем в прямоугольнике V передвигать сторону *DC* так, чтобы она оставалась параллельной стороне *AB*, пока стороны *AD* и *AB* не сделаются равными. Получим квадрат VII. Квадрат есть равносторонний прямоугольник.

6. Взяв ромб VI за вершины *B* и *C*, выпрямим его, чтобы стороны *AB* и *CD* стали перпендикулярно к основанию *AD*. Получим также квадрат VII. Значит, квадрат есть прямоугольный ромб.



Черт. 79. Виды четырехугольника.

Таким образом чертеж 79 показывает, что из параллелограмма III образуется прямоугольник V и ромб, VI.

А квадрат может быть получен и из прямоугольника V, и из ромба VI.

Чертеж 79 представляет как-бы родословную четыреугольников, показывая происхождение одного вида их из другого.

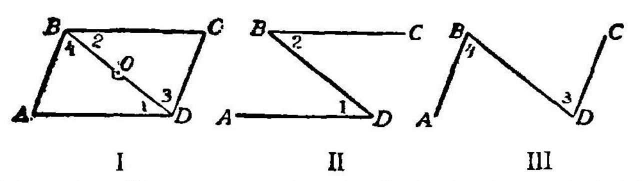
11. Параллелограмм.

Деление параллелограмма диагональю. 1. Начертим на бумаге параллелограмм. Для этого проведем две параллельные прямые и пересечем их двумя другими параллельными прямыми. Вырежем затем параллелограмм из бумаги.

2. Проведем в параллелограмме *ABCD* диагональ *BD*. Она разделит его на два треугольника *ABD* и *CBD*. Требуется ответить на вопрос, равны ли треугольники *ABD* и *BCD*?

Перегнем параллелограмм по диагонали *BD*. Треугольники *ABD* и *CBD* не совмещаются. Следовательно они несимметричны относительно диагонали *BD*.

Наложим иначе треугольник *CBD* на треугольник *ABD*. Найдем средину *O* диагонали *BD* и разрежем параллелограмм по этой диагонали, обойдя при этом её средину, как показано на черт. 80. Прикрепив треугольник *BCD* в средине *O* его стороны *BD* кнопкой к столу



Черт. 80. Диагональ парллелограмма делит его на два равных треугольника, симметрично расположенных относительно точки.

или к доске, повернем его около *O* на пол-оборота, сохраняя его в той же плоскости. Треугольники *DBC* и *ABD* совместятся. Следовательно, они равны. Диагональ *BD* делит параллелограмм *ABCD* на два равных треугольника.

Центр симметрии. Точка *O*, вокруг которой мы повернули на полуоборот треугольник *BCD*, чтобы совместить его с треугольником *ABD*, называется центром симметрии. Треугольники *BCD* и *ABD* — симметричны относительно этой точки.

Доказательство. Отчего же треугольники *BCD* и *ABD* оказались равными, и во всяком ли параллелограмме это будет?

Сравним треугольники *BCD* и *ABD* (черт. 80) без разрезывания параллелограмма и без наложения их друг на друга. Нам известно, что стороны параллелограмма попарно параллельны, т.-е. известно, что

BC параллельна *AD* и *AB* параллельна *DC*.

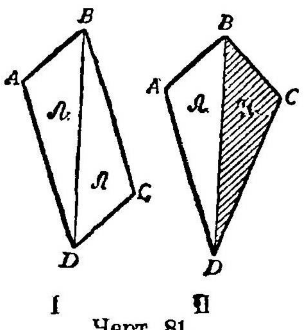
Сотрем на время для большей ясности стороны параллелограмма *AB* и *DC* (фиг. II). Так как *BC* параллельна *AD*, а прямая *BD*—секущая, то $\angle 1 = \angle 2$.

Начертив снова стороны *AB* и *DC*, сотрем стороны *BC* и *AD*. Так как *AB* параллельна *DC* (фиг. III), то уг. 3 = уг. 4. Кроме того диагональ *BD* служит стороною и треугольника *ABD*, и треугольника *DBC*.

Отсюда видим, что сторона *BD* и два прилежащих к ней угла 1 и 4 одного треугольника равны стороне *BD* и двум прилежащим углам 2 и 3 другого треугольника..Поэтому треугольники *ABD* и *BCD* равны. Так будет во всяком параллелограмме:

Диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.

Совместимые плоские фигуры. Диагональ параллелограмма *ABCD* (черт. 81, I) делит его на два равных треугольника *ABD* и *CBD*. Вырезав параллелограмм *ABCD* из бумаги, поставим на поверхности его, обращенной к нам, букву *Л*—«лицо», а на поверхности обратной—букву *И*, т.-е. «изнанка». Чтобы совместить треугольники *ABD* и *BCD*, надо повернуть треугольник *BCD* вокруг средины *BD*, сохраняя его в той же плоскости. Оба треугольника обращены к нам „лицом“.



Черт. 81.

Попробуем теперь оба треугольника *ABD* и *CBD* разместить симметрично относительно какой-либо прямой Это нам не удастся, пока оба треугольника повернуты к нам лицом или оба изнанкой. Но достаточно повернуть один из них на изнанку, и симметричное их расположение

сделается возможным (черт. 81, II). Зато совместить эти треугольники, пока один из них обращен к нам лицом, а другой изнанкой, не удастся.

Задачи. 110. Прямоугольник, вырезанный из бумаги, разрезать по диагонали. Как должны быть обращены к нам поверхности треугольников, чтобы их можно было совместить? Чтобы их можно было расположить симметрично относительно какой - либо прямой?

111. Квадрат разрезать по диагонали. Каким движением можно совместить оба треугольника?

112. Какой стороной должны быть обращены к нам оба треугольника предыдущей задачи, чтобы возможно было их расположить как-либо симметрично?

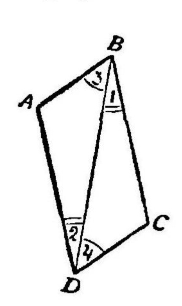
113. Вырезать из бумаги два равных равнобедренных треугольника. Сколькими способами их можно совместить?

114. Вырезать из бумаги два равных равносторонних треугольника. Сколькими способами их можно совместить?

115. Вспомните, сколькими способами можно совместить два равных квадрата? два равных прямоугольника? Сравните число способов совпадения равных фигур и число осей симметрии в каждой из них!

116. Вырезать из бумаги два равных неравнобедренных треугольника. Сколькими способами их можно совместить?

Можно ли составить параллелограмм из двух равных треугольников? Вырезав из бумаги два каких угодно треугольника (лучше неравнобедренных), отметим на них соответственно равные углы и стороны. Составим из них различные четыреугольники. Из шести полученных четыреугольников три кажутся нам параллелограммами.



Черт. 82.

Убедимся в том, что четыреугольник, изображенный на черт. 82 и составленный из двух равных треугольников ABD и CBD, действительно есть параллелограмм. Параллелограмм есть четыреугольник, у которого стороны попарно параллельны. Параллельны ли стороны четыреугольника $ABCD$:

$$AB \text{ и } CD,\ AD \text{ и } BC?$$

Сотрем мысленно стороны AD и BC. Тогда останутся стороны AB и CD и секущая BD. Так как углы 3 и 4 равны, то стороны AB и CD параллельны. Также можно удостовериться, что и стороны AD и BC

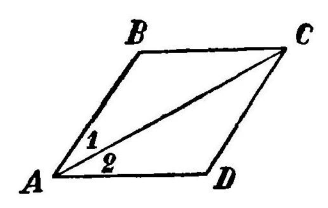
параллельны. Поэтому четыреугольник *ABCD*—параллелограмм.

Задачи. 117. Построить параллелограмм, у которого стороны 5 см. и 4 см. и диагональ 4,8 см.!

118. Построить параллелограмм, у которого основание 5 см., бок. сторона 3 см. и высота 2,5 см.

119. Построить ромб, у которого сторона равна 5 см.! определенная ли это задача? Какое данное вы бы присоединили к этому, чтобы задача стала определенной?

Симметрия ромба. 1. Вырезав ромб *ABCD* из бумаги, проведем в нем диагональ *AC* (черт. 83), которая разделит его на два равных треугольника *ABC* и *ADC*. Эти треугольники можно совместить двумя способами: а) перегнуть ромб по диагонали *AC*; б) разрезав ромб по диагонали *AC*, повернуть один из треугольников *ABC* вокруг средины диагонали на пол-оборота.



Черт. 83.

Следовательно треугольники *ABC* и *ADC*—симметричны относительно диагонали *AC* и относительно ее середины.

Итак, *диагональ ромба есть его ось симметрии.*

Осей симметрии у ромба две.

Теперь становится понятным, почему ромбом пользуются как формой удобной для украшений: он — симметричен. При этом ромб ставят на одну из вершин и никогда не ставят на сторону. Отчего это?

2. Так как ромб *ABCD*—фигура симметричная относительно диагонали, то

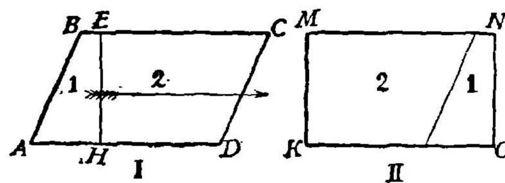
а) диагональ ромба делит его углы пополам;

б) диагонали ромба—перпендикулярны одна к другой.

Черт. 84. Подвижная модель ромба.

Эти свойства ромба можно наблюдать на модели ромба, сделанной из деревянных прутиков. Обе диагонали его раздвижные (черт. 84).

Разделить угол пополам. Требуется разделить угол ACB на две равные части. Так как диагональ ромба делит его пополам, то в угле ACB построим ромб [1]). Произвольным радиусом опишем дугу DE, приняв точку C за ее центр. Из точек D и E тем же радиусом мы опишем дуги, которые пересекутся в точке O. Соединим точки C и O; прямая CO делит угол ACB пополам. Чтобы убедиться в этом, проведем прямые DO и EO. Получим ромб $DOEC$, в котором диагональ CO делит угол ACB пополам.



Черт. 85. Превращение параллелограмма I в прямоугольник II.

Площадь параллелограмма. Основание и высота параллелограмма a и h. Числа a и h — целые или дробные. Параллелограмм можно превратить в прямоугольник, основание и высота которого a и h (чертеж 85). Поэтому площадь S параллелограмма равна

$$S = a \cdot h$$

Задачи. 120. Вычислить площадь параллелограмма, основание и высота которого 4,8 см. и 3,5 см.! 8,12 м. и 4,5 м.!

121. Начертив параллелограмм, измерить его площадь приняв за основание сперва одну его сторону, а затем другую. Сравните оба результата.

122. Измерить площадь участка 8, занятого лесом на плане, (чертеж 86), приняв, что план сделан в масштабе 1:1200.

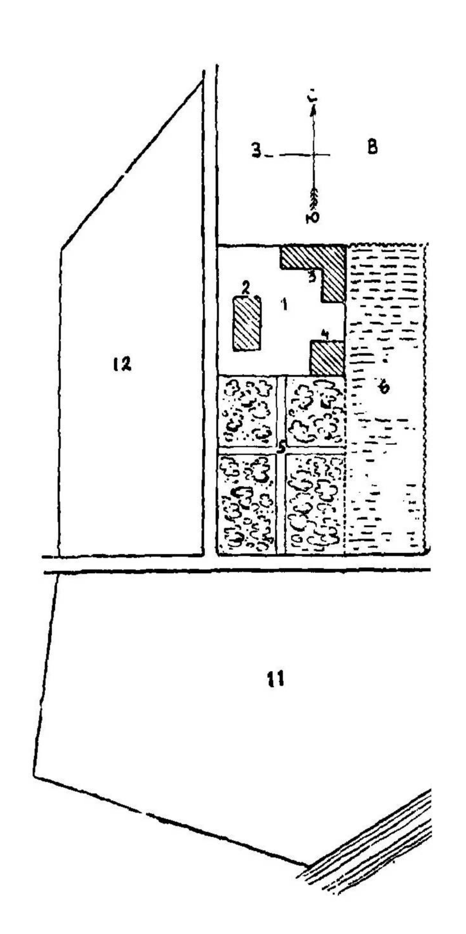
123. Поле имеет форму параллелограмма, смежные стороны которого 140 м. и 100 м., и угол между ними 75°. Начертить его план в масштабе 1:2000. Вычислить по плану площадь поля.

124. Диагонали ромба равны 8,2 см. и 6,5 см. Вычислить его площадь. Обозначив диагонали ромба буквами a и b, написать формулу его площади.

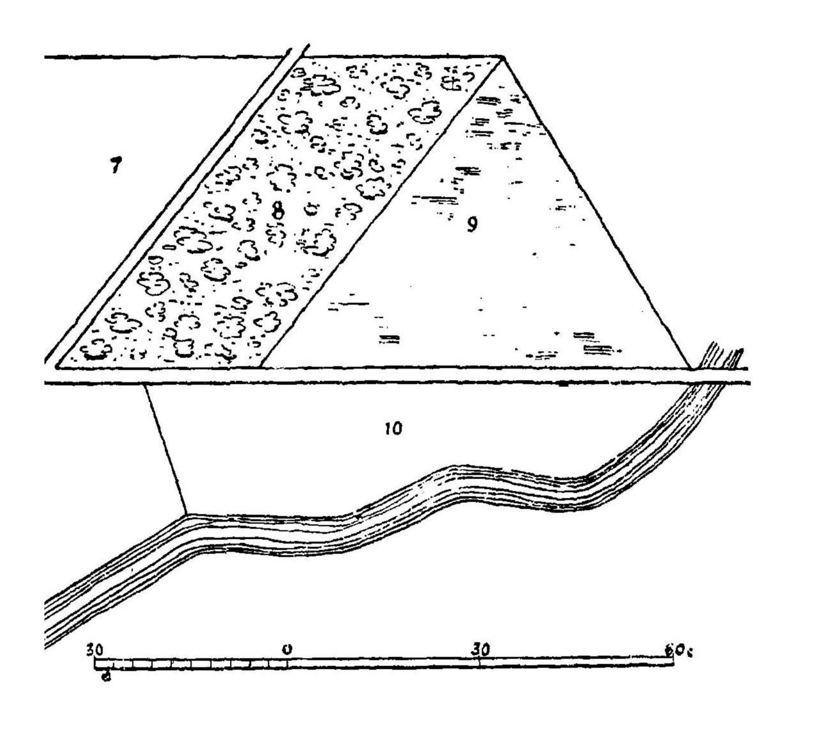
125. Площадь ромба, у которого одна диагональ длиннее другой на 8 см., не изменится, если меньшую диагональ удлинить на 3 см., а большую укоротить на 4 см. Составив уравнение, вычислить диагонали.

---

[1]) Проделайте построение сами и проведите доказательство на своем чертеже.


С
З
В
Ю
1
2
3
4
5
6
11
12

План усадьбы: 1—двор, 2—дом, 3—сарай. 4—амбар, 5—сад, 6—огород, 8—лес, 9—мокрый луг, 10 луг, 11—пашня, 12—пашня.



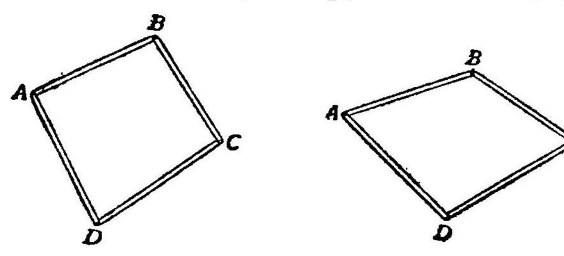
Черт. 86

ГЛАВА III.

Многоугольники.

12. Равные и подобные многоугольники.

Определенный и неопределенный многоугольник. 1. Составим из четырех прутиков четыреугольник, скрепив их гвоздиками, по гвоздику в каждой вершине (чертеж 87). Форму этого четыреугольника можно менять, растягивая его, напр., за вершины A и C. Четыре стороны не определяют четыреугольника.



Черт. 87. Подвижный четыреугольник: четыре стороны не определяют четыреугольника.

Задачи. 126. Построить ромб, сторона которого равна 5 см. (задача 119). Много ли ромбов, неравных друг другу, можно построить по данной его стороне?

127. Построить несколько квадратов, стороны которых равны 2 см. Могут ли эти квадраты быть неравны?

2. Скрепив три прутика гвоздиками так, чтобы получился треугольник, мы убедимся, что изменить форму этого треугольника не удастся, не разрушив треугольника: три стороны вполне определяют треугольник.

3. Как скрепить четыреугольник $ABCD$ (черт. 87), чтобы он не изменял своей формы? Для этого составим его из треугольников. Это можно сделать, соединив прутиком две его вершины A и C.

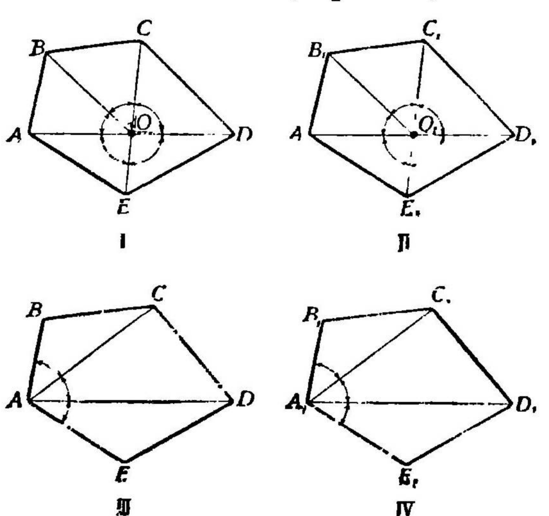
Можно протянуть прутики от всех четырех его вершин и скрепить концы их вместе (как на черт. 88, I). Тогда четыреугольник составится из четырех треугольников.

Построение многоугольника, равного данному. Построим многоугольник, равный данному многоугольнику *ABCDE*.

Нам известно, как построить треугольник, равный данному треугольнику. Разделим поэтому многоугольник на треугольники.

1. Внутри пятиугольника *ABCDE* (черт. 88) взята точка *O*, которая соединена с его вершинами.

Построим теперь вокруг точки O_1 (черт. II) треугольники, равные треугольникам *AOB*, *BOC* и т. д. в том же порядке, как они расположены вокруг точки *O*. Для этого в треугольнике *AOB* измерим стороны *AO* и *BO* и угол *AOB*; по этим данным начертим треугольник $A_1O_1B_1$. Далее так же построим и треугольник $B_1O_1C_1$ и т. д.



Черт. 88. Построение многоугольника, равного данному многоугольнику.

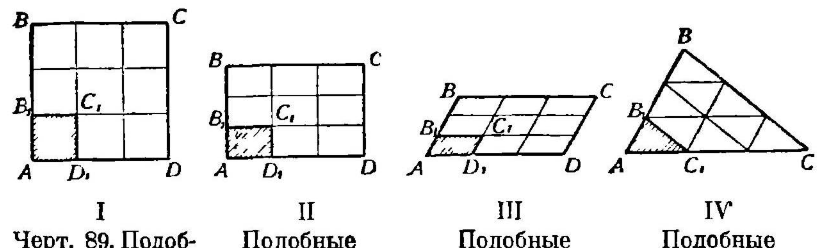
2. Можно пятиугольник *ABCDE* разбить на треуголь ники и иначе, как на черт. III. Затем построить треугольники, равные треугольникам *ABC*, *ACD* и *ADE*.

Если бы мы эти треугольники расположили в ином порядке, чем они расположены в треугольнике III, то получили бы многоугольник, равносоставленный с многоугольником III, но ему неравный.

Обратим внимание на то, что пятиугольник *ABCDE* (черт. I) определен 9-ю данными: *OA*, *OB*, *OC*, *OD*, *OE*, $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, и $\angle DOE$. Пятиугольник *ABCDE*

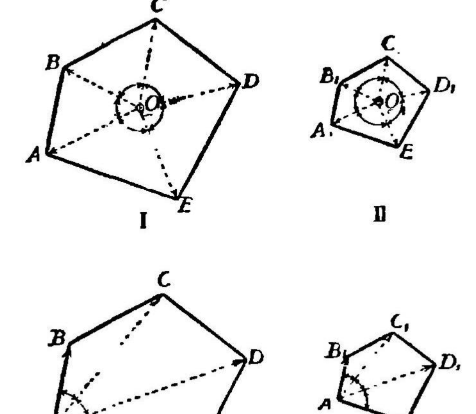
(черт. III) определен 7-ью данными: AB, $\angle BAC$, AC, $\angle CAD$, AD, $\angle DAE$, AE.

Подобные многоугольники. 1. Пред нами (черт. 89) квадрат I, прямоугольник II, параллелограмм III и тре-



Черт. 89. Подобные квадраты $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$. Подобные прямоугольники $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$. Подобные параллелогр. $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$. Подобные треугольники ABC и AB_1C_1.

угольник IV. Разделим все стороны этих фигур на 3 равные части и точки деления их соединим, как на чертеже. Получим на чертеже I подобные квадраты $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$, на черт. II подобные прямоугольники $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$, на черт. III—подобные параллелограммы $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$, на черт. IV—подобные треугольники ABC и AB_1C_1.



Черт. 90. Построение подобных многоугольников: многоугольник II подобен многоугольнику I; многоугольник IV подобен многоугольнику III.

Рассматривая внимательнее фигуру III, мы замечаем, что стороны AD, DC, CB и BA параллелограмма $ABCD$ в одно и то же число раз и именно в три раза длиннее сторон AD_1, D_1C_1, C_1B_1 и B_1A параллелограмма $AB_1C_1D_1$. А углы A, B, C и D первого параллелограмма равны углам A, B_1 C_1 D_1 — второго. То же мы найдем и в других фигурах I, II и IV. Мы и раньше встречались с подобными многоугольниками (стр. 15) и треугольниками и наблюдали такие же признаки подобия.

2. Рассмотрим еще подобные многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (черт. 90). Углы одного многоугольника равны углам другого. Напишем их в том порядке, в каком они расположены во многоугольниках: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ и т. д. Стороны AB и A_1B_1, стягивающие вершины равных углов, будем называть соответствующими. Таким образом соответствующими будут стороны: AB и A_1B_1, BC и B_1C_1 и т. д.

Подобными называем мы многоугольники в том случае, когда углы одного из них равны углам другого и стороны одного многоугольника в одно и то же число раз больше или меньше соответственных сторон другого, т. е.

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \text{ и т. д.}$$

Построение многоугольника, подобного данному. До сих пор нам приходилось снимать план или с прямоугольных участков земли, или с треугольных. Научимся теперь производить съемку плана многоугольного участка земли. Но так как участок земли и его план должны быть фигурами подобными, то познакомимся с построением многоугольника, подобного данному многоугольнику.

1. Разделив многоугольник $ABCDE$ на треугольники, как на черт. 90 I, измерим стороны AO и BO и угол AOB. Уменьшив стороны эти, напр., вдвое и оставляя угол без изменения, построим по этим данным треугольник $A_1O_1B_1$. Треугольники AOB и $A_1O_1B_1$ подобны.

Так же построим треугольник $B_1O_1C_1$, подобный треугольнику BOC и т. д.

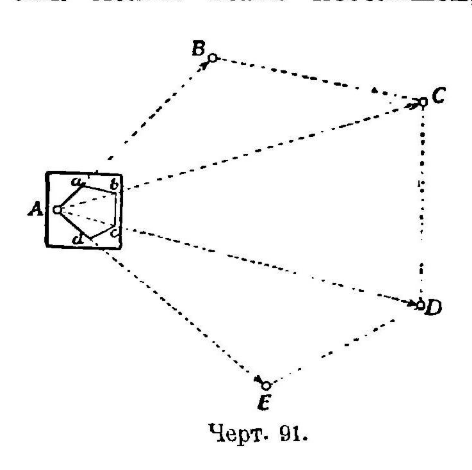
Получим многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$, в котором стороны в два раза короче сторон многоугольника $ABCDE$, а углы $A_1, B_1, C_1 \ldots$ равны углам $A, B, C \ldots$

Поэтому многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$—подобны.

Задача 128. Зная, что многоугольники I и II подобны, написать равные отношения их сторон. Составить из этих отношений несколько пропорций.

2. Можно многоугольник *ABCDE* разделить на треугольники так, как на черт. III, диагоналями. Затем построить треугольники, подобные треугольникам *ABC*, *ACD* и *ADE*, и в том же порядке. Получим многоугольник IV, подобный многоугольнику III.

Съемка плана с помощью мензулы. Мензула—это столик, на котором кнопками прикреплен лист бумаги. Столик можно взять небольшой, на трех ножках. Воткнув в вершинах участка земли вехи, поставим столик над одной из его вершин (черт. 91). На лист бумаги кладем линейку. На линейке вдоль нее параллельно ее ребру проведена черта; на концах черты воткнуты булавки. Направляем с помощью булавок ребро ее по прямой *AB* и проводим черту *Aa*. Затем, приложив ребро линейки к точке *A*, направляем его по прямой *AC*, и проводим черту *Ab* и т. д. Таким образом на бумаге будут начерчены стороны углов *BAC*, *CAD*, *DAE*. Теперь остается измерить стороны *AB* и *AE*, а также диагонали *AC* и *AD*, и затем здесь же, не сходя с места, начертить отрезки *Aa*, *Ab*, *Ac* и *Ad* в выбранном масштабе. Соединив точки *a*, *b*, *c* и *d*, получим план данного участка земли.



Черт. 91.

Понятно, что мензулу мы могли бы поместить в каком угодно другом месте; лишь бы с этого места были видны все вехи, поставленные в вершинах участка.

Съемка плана с помощью астролябии. Отметим вехами вершины многоугольника, расположенного на поверхности земли. Астролябию поместим над одной из этих вершин. Измерим с помощью астролябии углы *BAC*, *CAD* и *DAE* (черт. 91) и с помощью мерной веревки отрезки *AB*, *AC*, *AD* и *AE*. Придя домой, мы на основании полученных

данных, можем построить в выбранном масштабе многоугольник, подобный данному.

Астролябию мы могли бы поставить в каком угодно другом месте, с которого видны все вершины многоугольника.

13. Ошибка суммы и произведения приближенных чисел.

Ошибка суммы приближенных чисел. Решим задачу: стороны четыреугольника равны 3,7 см.; 5,3 см.; 1,7 см.; 7 см. Каждая из них измерена с ошибкой меньшей 0,1 см. Найти периметр четыреугольника и границу его ошибки.

Рассуждая так же, как это мы сделали на стр. 28—29, мы найдем периметр 17,7 см. и границу ошибки 0,4 см.

Эту границу мы могли бы найти значительно скорее, складывая границы ошибок данных чисел: $0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1$.

Итак, складывая приближенные числа, мы складываем и границы их ошибок, и таким образом находим границу ошибки их суммы.

Задача. 129. Участок земли имеет стороны 17,8 метр.; 48,3 м.; 75,1 м.; 64 м., из которых две первые измерены каждая с ошибкой, меньшей 0,1 м., а две другие—с ошибкой меньшей 0,3 м. Вычислить длину всех сторон вместе этого участка и границу ошибки суммы.

Ошибка произведения приближенных чисел. 1. Первая задача. Стороны прямоугольника 9,7 см. и 3,5 см. измерены каждая с ошибкой меньшей 0,1 см. Вычислить площадь прямоугольника и границу ее ошибки.

Площадь прямоугольника равна

$$9{,}7 \times 3{,}5 = 33{,}95 \text{ (кв. см.)}$$

Найдем границу ошибки этого произведения. Если бы при измерении сторон была бы сделана ошибка 0,1 см., то стороны прямоугольника могли бы оказаться или 9,6 см. и 3,4 см., или 9,8 см. и 3,6 см. И тогда ошибка в произведении 33,95 оказалась бы наибольшей. Посмотрим, какова она была бы в этих случаях:

$$9{,}6 \times 3{,}4 = 32{,}64 \text{ (кв. см.)}$$
$$\text{и } 9{,}8 \times 3{,}6 = 35{,}28 \text{ (кв. см.)}.$$

Если бы истинное произведение оказалось 32,64 кв. см., то ошибка в произведении 33,95 кв. см. была бы равна разности:

$$33{,}95 - 32{,}64 = 1{,}31 \text{ (кв. см.)}$$

Если бы истинное произведение оказалось 35,28 кв. см., то ошибка была бы равна разности

$$35{,}28 - 33{,}95 = 1{,}33 \text{ (кв. см.)}$$

Из двух возможных ошибок 1,31 и 1,33 вторая большая. ее и будем считать границей. Значит, принимая площадь прямоугольника равной 33,95 кв. см., мы делаем ошибку меньшую 1,33 кв. см.

Из этого примера видим, что. вычисляя границу ошибки приближенного произведения 33,95, мы 1) увеличиваем сомножителей 9,7 и 3,5 на данное число 0,1, 2) вычисляем произведение чисел 9,8 и 3,6, которое равно 35,28, и 3) находим разность чисел 35,28 и 33,95.

Итак произведение 33,95 заключает ошибку меньшую числа 1,33. Значит в нем уже цифра единиц 3 ненадежна, другие же цифры справа 9 и 5 принимать во внимание не стоит, ибо они случайны.

Сохранив в произведении сомнительную цифру единиц 3 и отбросив 0,95, прибавим 1 к 33, ибо отброшенная часть 0,95 ближе к 1, чем к нулю. Получим округленное произведение 34. Отбрасывая 0,95 и прибавляя в то же время 1, мы допускаем новую ошибку 0,05, ибо 1 — 0,95 = 0,05. Значит произведение 34 в худшем случае может заключать две ошибки: ошибку 1,33, зависящую от неточности данных чисел, и ошибку 0,05, получившуюся вследствие округления. Вместе эти обе ошибки составят 1,38.

Таким образом площадь прямоугольника можем принять равной 34 кв. см. с ошибкой меньшей 1,38 кв. см.

2. Вторая задача. Участок земли имеет форму треугольника, сторона которого равна 36,4 саж., а высота, соответствующая ей, 24,3 саж. Оба числа заключают ошибки меньшие 0,1 саж. Вычислить площадь участка и границу ее ошибки.

Площадь участка найдем, умножив половину числа 36,4 на 24,3:

$$18{,}2 \times 24{,}3 = 442{,}26 \text{ (кв. саж.).}$$

Границу ошибки произведения 442,26 найдем так же, как и в предыдущей задаче. Ошибка числа 36,4 с. меньше 0,1 с.; ошибка же числа 18,2 с. будет вдвое меньше, т.-е. 0,05 саж.

Прибавив 0,05 с. к 18,2 с., а 0,1 с. к 24,3 с., полученные числа перемножим:

$$18{,}25 \times 24{,}4 = 445{,}30 \text{ (кв. саж.)}$$

Границу ошибки в произведении 442,26 получим вычтя

$$445{,}30 - 442{,}26 = 3{,}04 \text{ (кв. саж.)}$$

Ошибка в числе 442,26 меньше 3,04. Поэтому цифра единиц 2 в произведении 442,26 уже сомнительна. Прочие цифры

справа от нее случайны и могут быть отброшены: получим число 442.

Отбрасывая 0,26, мы допускаем новую ошибку, которая вместе с прежней 3,04 составит границу общей ошибки 3,3. Следовательно площадь треугольника будем считать равной 442 кв. саж. с ошибкой меньшей 3,3 кв. саж.

3. Отбрасывая в приближенном числе случайные цифры, мы прибавляем единицу к предшествующей им цифре, если первая из отбрасываемых цифр равна или более 5.

Напр., если в числе 25,473 цифры 7 и 3 случайны, то отбрасывая их, прибавляем единицу к 4 и получим 25,5.

Если в числе 27843 цифры 4 и 3 случайны, то отбросив их, получим число 27800.

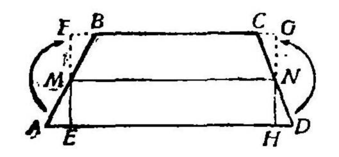
Задачи. 130. Найти площадь прямоугольного участка земли, длина и ширина которого 34,5 саж. и 27 саж. измерены с ошибкой меньшей 0,1 саж.

131. Вычислить площадь треугольника, основание и высота которого 5,3 см. и 3,2 см. имеют ошибки меньшие 0,1 см.

14. Площадь многоугольника.

Площадь трапеции. Найти площадь трапеции $ABCD$, у которой основания $AD=a$, $BC=b$ и высота $EF=h$. Числа a, b и h —целые или дробные.

1. Вырезав из бумаги трапецию $ABCD$, превратим ее в прямоугольник (черт. 92). Для этого, разделив боковые стороны ее AB и CD пополам, из их средин M и N опустим перпендикуляры ME и NH на основание AD. Разрежем трапецию по линиям ME и NH на три части. Повернув треугольники AME и DNH вокруг точек M и N на пол оборота, мы получим прямоугольник $EFGH$.



Черт. 92. Превращение трапеции в прямоугольник.

Задача. 132. Положив трапецию $ABCD$ на бумагу (черт. 92), обведем ее карандашом. Повернув треугольники AME и DNH вокруг точек M и N на пол оборота, обведем их карандашем; получим фигуру $EFGH$. Доказать что эта фигура—прямоугольник. Для этого доказать, что линия FBC—неломанная, т.-е. что $\angle FBM+\angle MBC=180°$. Так же доказать, что линия FME прямая, а не ломанная.

Как расположены треугольники AME и BMF относительно точки M?

2. Вместо трапеции $ABCD$ мы получили прямоугольник $EFGH$. Прямая MN —средняя линия трапеции.

Чтобы вычислить площадь трапеции, надо ее среднюю линию умножить на высоту.

3. Как вычислить площадь трапеции, когда измерены два ее основания AD, BC и высота? Основания равны a и b, а высота h.

Два основания EH и FG прямоугольника составлены из двух оснований AD и BC трапеции, т.-е.

$$EH+FG=AD+BC$$

А так как $EH=FG=MN$, то

$$MN=\frac{AD+BC}{2}$$

Средняя линия трапеции равна полусумме ее оснований.

Поэтому мы можем иначе вычислить площадь прямоугольника $EFGH$. Его основание EH равно средней линии MN, которая в свою очередь равна $\frac{a+b}{2}$; высота прямоугольника — h; значит площадь S прямоугольника равна

$$S=\frac{a+b}{2}.\ h.$$

Такова же будет и площадь трапеции $ABCD$.

Площадь трапеции найдем, если умножим полусумму ее оснований на высоту.

Задачи. 133 *a*) Превратить трапецию $ABCD$ в треугольник, разрезав ее по прямой линии BN (черт. 92).

b) Прямую BN и основание AD продолжим до пересечения их в точке O. Совместимы ли треугольники BNC и OND?

c) Если трапеция и треугольник ABO фигуры равно составные, то какой формулой выразится площадь трапеции?

134. Вырезав из бумаги какую-либо трапецию, разделить ее на 2 части, из которых можно было бы составить параллелограмм

135. Вырезав из бумаги трапецию, разделить ее на три части, из которых можно составить прямоугольник.

136. Вычислить площадь трапеции, у которой основания 12,6 м. и 9,9 м., а высота 3,6 м.

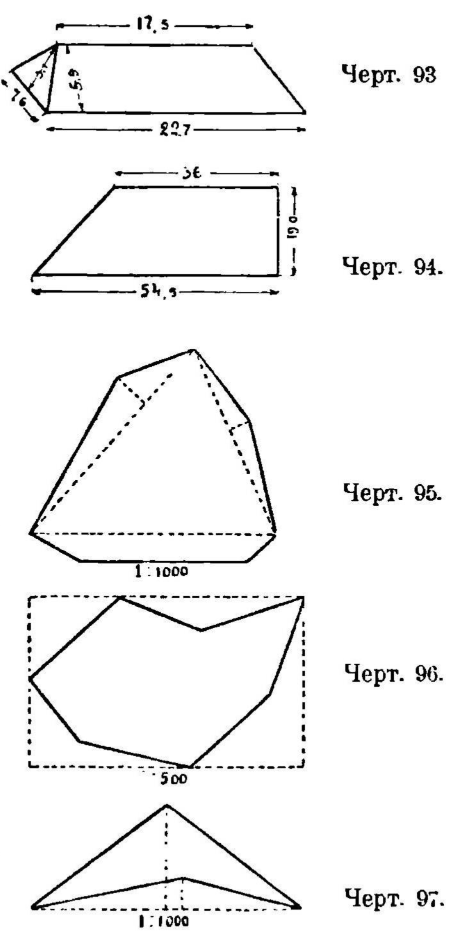
137. На плане вашей местности разыскать трапецию и, произведя нужные измерения, вычислить ее площадь.

138. Четырехскатная крыша (черт. 93) состоит из двух равных треугольников и двух равных трапеций, размеры которых в аршинах указаны на чертеже. Сколько потребуется для сооружения крыши плотников, гонту и гвоздей, если на 1 кв. саж. крыши требуется 0,5 плотника, 154 гонтин и 185 штук гвоздей.

139. Некто покупает участок земли, имеющий форму трапеции (черт. 94). Размеры его в саженях указаны на чертеже. Этот участок состоит из огорода и сада. Огород имеет форму прямоугольника, высота которого равна высоте трапеции. Огород составляет $^2/_5$ всего участка. Вычислить площадь всего участка, площадь и длину огорода, площадь сада.

140. На большем основании трапеции построен равновеликий ей прямоугольник. Высота прямоугольника 4 см., меньшее основание трапеции 3 см., высота ее 5 см. Вычислить большее ее основание, составив уравнение.

141. Вычислить площади участков земли, планы которых изображены на черт. 95, 96, 97 сплошными линиями. Точечные линии указывают, какие измерения надо произвести. Масштаб указан на чертежах.

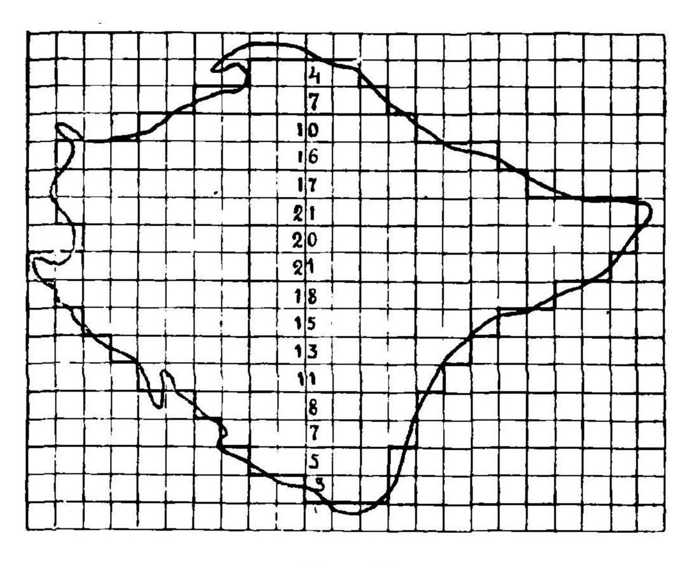


Черт. 93
Черт. 94.
Черт. 95.
Черт. 96.
Черт. 97.

Площадь фигуры, ограниченной кривой линией. 1. Пред нами план Васильевского Острова в г. Петербурге, перенесенный на клетчатую бумагу (черт. 98). Каждая клетка имеет сторону в $^1/_2$ см.

Сделаем подсчет клеток. заключающихся внутри плана. Те клетки, которые перерезываются границейплан а, считаем так. Часть клетки, большую половины ее, принимаем за целую клетку; зато часть клетки, меньшую половины

ее, вовсе не будем считать. На плане клетки, которые подлежат счету, обведены ломанной чертой. Каждое из чисел, стоящих на плане, обозначает число клеток в ряду. Всего их 196. Так как площадь одной клетки $^1/_4$



Черт. 98.

кв. см., то вся площадь фигуры равна $^1/_4$ кв. см. $\times$ 196 = = 49 кв. см.

Чтобы не переводить фигуры, площадь которой надо измерить, на клетчатую бумагу, можно нанести сетку из клеток на обыкновенную бумагу и затем эту бумагу сделать полупрозрачной, промаслив ее. Покрыв этой бумагой фигуру, площадь которой надо измерить, обводим карандашем те клеточки, которые подлежат подсчету.

2. Переведем фигуру, площадь которой требуется измерить (в нашем примере план Васильевского Острова), на плотную бумагу, напр., на обложечную бумагу, и аккуратно вырежем ее. Вырежем из той же бумаги прямоугольники в 100, 50, 20, 20, 10, 5, 2, 2, 1, $^1/_2$ кв. см. Положив фигуру на одну чашку аптекарских весов, на другую будем накладывать эти прямоугольники, как разновесы, до полного равновесия чашек. Подсчитав их площадь, найдем площадь фигуры.

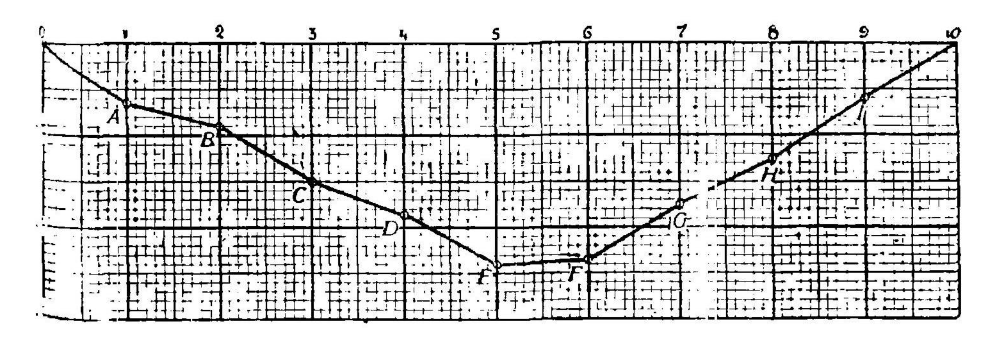
Задача. 142. Начертив на плотной бумаге какую либо фигуру, ограниченную кривой или ломанной линией, найти ее площадь двумя изложенными здесь способами. Сравнить результаты.

Площадь поперечного сечения (профили) реки. 1. Перекинув через реку веревку, на которой отмечены метры, измеряем глубину ее через каждый метр.

Допустим, что получены числа:

Расстояния от берега.	Глубина.
0 м.	0 м.
1 »	0,65 »
2 »	0,9 »
3 »	1.5 »
4 »	1.85 »
5 »	2,4 »
6 »	2,35 »
7 »	1,75 »
8 »	1,25 »
9 »	0,6 »
10 »	0 »

Начертив горизонтальную прямую (черт. 99), отметим на ней в условленном масштабе расстояния 0, 1, 2,



Черт. 99. Профиль реки.

3.... метр. Проведя в конце каждого метра перпендикуляр вниз, отметим на нем глубину реки в этом месте в том же масштабе. Соединив концы перпендикуляров, получим профиль русла реки.

Вычислим площадь профили. Для этого надо вычислить площади двух треугольников и ряда трапеций. Высоты тех и других равны 1 метру.

Обозначив площадь профили через S, найдем:

$$S = \frac{0,65}{2} + \frac{0,65+0,9}{2} + \frac{0,9+1,5}{2} + \frac{1,5+1,85}{2} + \frac{1,85+2,4}{2} + \frac{2,4+2,35}{2} + \frac{2,35+1.75}{2} + \frac{1,75+1,25}{2} + \frac{1.25+0,6}{2} + \frac{0,6}{2} = 0,65 + 0,9 + 1,5 + 1,85 + 2,4 + 2,35 + 1,75 + 1,25 + 0,6 = 13,25 \text{ кв. м.}$$

2. Узнаем сколько килограммов воды проходит чрез поперечное сечение реки в секунду. Определим в том месте реки, где мы измеряли ее профиль, скорость течения. Для этого подальше от берега бросим на поверхность реки щепку и пронаблюдаем, сколько метров она проплывет в несколько минут. Положим, что за 2 минуты течение унесло щепку на 80,4 м. Тогда скорость течения реки в секунду на поверхности ее будет

$$80,4:120 = 0,67 \text{ (м.)}.$$

Скорость воды на поверхности больше, у дна — меньше. Среднюю скорость вычисляют, умножая скорость воды на поверхности на число 0,8.

$$0,67 \text{ м.} \times 0,8 = 0,536 \text{ м.}$$

Представим себе часть реки длиной в 0,536 м., ограниченную с одной и с другой стороны плоскими поперечными сечениями, площади которых 13,25 кв. м. Объем ее найдем, умножив 13,25 × 0,536. Получим приблизительно 7,1 куб. м. Вес этой воды 7100 кгр.

15. Отношение площадей подобных фигур.

Вычисление площади участка земли по его плану. Выше мы измерили площадь плана Васильевского Острова. Нашли 49 кв. см. Вычислим действительную площадь Острова. План сделан в масштабе 1:50 000. Это значит, что 1 см. на плане означает длину 50 000 см., или 500 м. Тогда каждый кв. см. на плане обозначает площадь

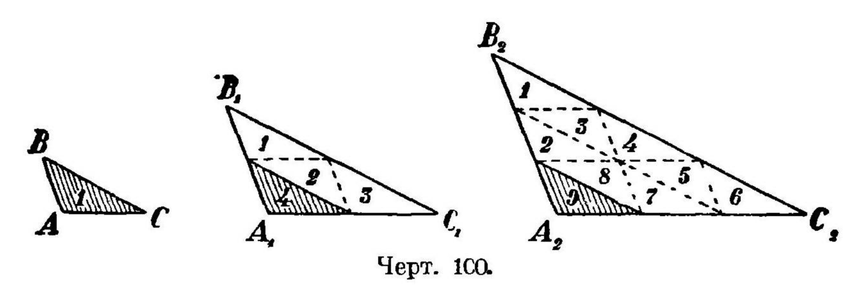
$$500 \times 500 = 250\,000 \text{ (кв. м.)} = 25 \text{ (гектаров)}.$$

Поэтому вся поверхность Васильевского Остр. занимает площадь

$$25 \times 49 = 1\,225 \text{ гектаров (больше 1 100 дес.)}.$$

Можно вычислить действительную площадь Острова по его плану и иначе. Но это, мы сделаем после изучения отношения площадей подобных фигур.

Отношение площадей подобных треугольников. 1. Каждая из сторон треугольника $A_1B_1C_1$ (черт. 100) разделена



Черт. 100.

на 2 равные части; сам треугольник разделен на 4 равных треугольника. Один из таких треугольников ABC изображен отдельно. Треугольник $A_1B_1C_1$ и треугольник 4 или ABC подобны. A_1C_1 и AC их соответственные стороны.

Сторона A_1C_1 в д в а раза больше стороны AC.

Площадь треуг. $A_1B_1C_1$ в ч е т ы р е т. е. в дважды-два раза больше площ. треуг. ABC.

Подобным же образом стороны треугольника $A_2B_2C_2$ разделены на 3 равные части, а сам треугольник разделен на 9 равных треугольников. Треугольник 9 равен треуг. ABC.

Сторона A_2C_2 в т р и раза больше стороны AC.

Пл. треуг. $A_2B_2C_2$ в д е в я т ь или в трижды-три раза больше пл. треуг. ABC.

Тем же способом можем убедиться, что, если два треугольника подобны, то отношения их сторон A_1C_1 и AC и отношения их площадей будут:

Отнош. сторон. $A_1C_1 : AC$	Отнош. площадей. $A_1B_1C_1 : ABC$
2	$4 = 2^2$
3	$9 = 3^2$
4	$16 = 4^2$
5	$25 = 5^2$
.	.
.	.
.	.

Отсюда видим, **что отношение** площадей подобных

треугольников не равно отношению их соответственных сторон.

Чтобы вычислить отношение площадей двух подобных треугольников, надо отношение их соответственных сторон возвысить в квадрат.

Задачи. 143. План треугольного участка земли, сделанный в масштабе 1:800, имеет площадь 12,75 кв. см. Вычислить действительную площадь участка.

144. Отношение соответствующих сторон двух подобных треугольников равно $3^1/_2$. Вычислить отношение их площадей.

Решить подобную же задачу, зная, что отношение сторон равно 10; 15; 7,5; 1,5.

145. Во сколько раз сторона одного треугольника должна быть больше соответственной стороны другого подобного ему треугольника, чтобы площадь первого треугольника была больше площади второго в 36 раз? в 100 раз? в 625 раз? в 2,25 раза?

146. Сторона треугольника составляет $^1/_{10}$ соответственной стороны другого подобного ему треугольника. Какую часть площади второго треугольника составляет площадь первого треугольника?

Можно отношение площадей подобных треугольников выразить и иначе. Пусть сторона A_2C_2 (черт. 100) равна 6 см., а сторона $AC = 2$ см. Тогда

$$\text{пл. треуг. } A_2B_2C_2 : \text{пл. треуг. } ABC = 9$$

$$\text{и } A_2C_2^2 : AC^2 = 6^2 : 2^2 = 9.$$

Отсюда $\quad$ $\text{пл. } A_2B_2C_2 : \text{пл. } ABC = A_2C_2^2 : AC^2$,

т.-е. отношение площадей двух подобных треугольников равно отношению квадратов их соответственных сторон. Иначе выражают эту мысль так: площади подобных треугольников пропорциональны квадратам соответственных их сторон.

Задача. 147. Вычислить площадь треугольного участка земли, зная, что площадь его плана 15,3 кв. см. Соответственные же стороны участка и его плана 32 м. и 10 см.

Отношение площадей параллелограммов. Рассмотрев чертеж 89 стр. 66, мы видим, что стороны квадрата I, прямоугольника II и параллелограмма III разделены на 3 равные части. Каждая из этих фигур разделена на 9 равных частей. Квадраты $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ (черт. I) подобны. Подобны же прямоугольники $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ (черт. II), параллелограммы $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ (черт. III).

Сторона квадрата $ABCD$ в 3 раза больше стороны квадрата $AB_1C_1D_1$ (черт. I). Площ. кв. $ABCD$ в 9 раз больше площади квадрата $AB_1C_1D_1$. То же можно сказать и о каждой паре других подобных фигур.

Следовательно, когда два параллелограмма подобны, то, чтобы вычислить отношение их площадей, надо отношение их соответственных сторон взять в квадрат.

Задача. 148. Начертив прямоугольник, построить другой прямоугольник, стороны которого составляют $^1/_4$ соответственных сторон первого прямоугольника. Какую часть первого прямоугольника составляет второй?

Решить ту же задачу, взяв вместо $^1/_4$ числа $^3/_4$! $^2/_5$! 0,3!

Отношение площадей подобных многоугольников. Вычислим теперь площадь Васильевского Острова (черт. 98) иначе, чем прежде.

Когда два многоугольника подобны, и сторона одного из них больше соответственной стороны другого в два раза, то площадь первого многоугольника больше второго в 4 раза, или в 2^2 раза. Если бы отношение сторон этих многоугольников было равно n, то отношение их площадей было бы $n . n$ или n^2.

Рассматривая план Васильевского Острова, как многоугольник, вычислим площадь самого Острова. Масштаб плана 1:50 000. Это значит, что каждая линия на поверхности Острова в 50 000 раз больше соответствующей линии на плане. Поэтому площадь Острова больше площади его плана в $50\,000^2$ раз, т.-е. в 2 500 000 000. Умножив 49 кв. см. на это число, получим 1225 гектаров.

Задачи. 149. Площадь участка земли на плане 37,5 кв. см. План сделан в масштабе 1:2000. Вычислить действительную площадь земли.

150. Петербургская губерния заключает 39200 кв. верст. Какова площадь губернии на карте, которая сделана в масштабе 1:4 200 000.

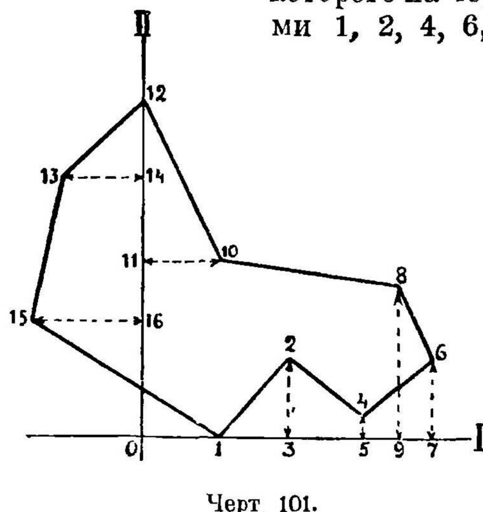
151. Отношение соответственных линий двух подобных многоугольников 1:15. Вычислить отношение их площадей.

152. Вычислить отношение соответственных линий в двух подобных многоугольниках, зная, что отношение их площадей 1:100! $^{25}/_{16}$! 1,21! 1:225! 121!

153. Вычислить сторону треугольника, зная, что сторона другого подобного ему треугольника 5 см., и площадь первого треугольника 28 кв. см., а второго 7 кв. см. Составить уравнение и решить его.

16. Съемка плана с помощью эккера.

Требуется снять участок земли (черт. 101), вершины которого на чертеже обозначены номерами 1, 2, 4, 6, 8, 10 и т. д.



Черт. 101.

С помощью эккера обозначаем две взаимно - перпендикулярные прямые линии OI и OII. Одну из них будем называть первой магистралью, другую—второю магистралью: число магистралей может быть различно и зависит от фигуры участка. Обозначим перпендикуляры из точек 2, 4, 6 и 8 на первую магистраль вехами 2—3, 4—5, 6—7 и 8—9; перпендикуляры из точек 10, 13 и 15 на вторую магистраль вехами 10—11, 13—14 и 15—16. Если эти перпендикуляры имеют незначительную длину (меньше 10 м.), то их можно отмерять на-глаз. Более длинные перпендикуляры строим с помощью эккера (ч. I, стр. 18) так. Пусть надо из точки 8 опустить перпендикуляр на магистраль OI. Выберем на ней на-глаз точку 9, которая должна служить другим концом перпендикуляра. Поставив в ней эккер, направим одну прямую его *xy* по магистрали OI и будем глядеть, направлена ли другая прямая *uz* к вехе 8. Если нет, то эккер передвигается.

После этого производим измерения расстояний 0—1, 1—3, 2—3, 3—5 и т. д. Записи измерений будем делать так. Взяв с собой тетрадку, начертим от руки на левой

странице ее приблизительный набросок плана с соответствующими обозначениями вех, а на правой составим таблицу по следующему образчику:

ДЛИНА МЕРНОЙ ВЕРЕВКИ 10 м.

Название точек.	Число спиц.	Остаток.	Длина.
	Первая магистраль.		
0—1	1	8,3 м.	18,3 м.
1—3	2	5,4 „	25,4 „
2—3	1	9 „	19 „
3—5	1	7,5 „	17,5 „
4—5	—	4,8 „	4,8 „
5—9	—	8,7 „	8,7 „
8—9	3	5,6 „	35,6 „
9—7	—	7,8 „	7,8 „
6—7	1	2,3 „	12,3 „
	Вторая магистраль.		
0—16	2	7 м.	27 м.
15—16	2	6,3 „	26,3 „
16—11	1	5,2 „	15,2 „
11—10	1	8,5 „	18,5 „
11—14	2	1 „	21 „
13—14	1	9,3 „	19,3 „
14—12	1	7,5 „	17,5 „

Имея эту таблицу можем начертить в избранном масштабе план участка.

17. Правильные многоугольники.

Правильными многоугольниками часто пользуются при составлении орнаментов для зданий, узоров, мебели, при разбивке садовых клумб и т. д.

Глиняные плитки для пола и дубовые пластинки для паркета часто имеют форму правильных многоугольников. Основания пчелиных восковых ячеек и некоторые снежинки имеют также вид правильного многоугольника.

Составим правильный восьмиугольник из 8 одинаковых спичек!

Состовляя правильный восьмиугольник, мы стараемся расположить спички так, чтобы все углы многоугольника были равны, иначе он не будет иметь правильности.

Задачи. 154. Составить правильный многоугольник из 7, 6, 5, 4 и 3 одинаковых спичек!

155. Можно ли из 8, 7, 6, 5 и 4 одинаковых спичек образовать многоугольники неправильные, т. е. неравноугольные?

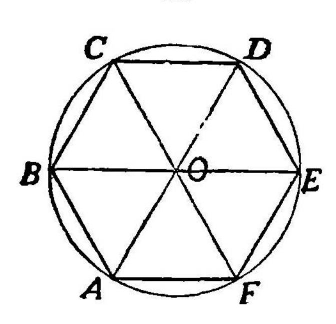
156. Можно ли из 3 одинаковых спичек, соединяя их концами, образовать неправильный, т. е. неравноугольный треугольник?

Правильным многоугольником называется такой многоугольник, у которого все стороны и все углы равны. Для правильности многоугольника необходимо и равенство углов, и равенство сторон.

Задачи. 157. Составить из бумажных полосок равносторонний, но неравноугольный многоугольник! Равноугольный, но неравносторонний многоугольник!

158. Есть ли ромб правильный многоугольник? Есть ли прямоугольник правильный многоугольник? Какой прямоугольник можно назвать правильным многоугольником?

Составить из равносторонних треугольников правильный шестиугольник. Вырезав из бумаги 6 равных равносторонних треугольников, расположим их на плоскости вокруг одной точки так, чтобы их вершины сходились в этой точке (черт. 102). Фигура, которая получилась, кажется нам правильным шестиугольником. Посмотрим, так ли это?



Черт. 102. Правильный шестиугольник, составленный из 6 равных равносторонних треугольников.

1. Покрывают ли углы *AOB*, *BOC* и т. д. шести равносторонних треугольников всю плоскость вокруг точки O? Угол равностороннего треугольника равен 60°. Вокруг точки O мы поместили 6 углов, которые вместе составят 360°, т. е. заполнят всю плоскость вокруг точки O.

2. Совпадут ли боковые стороны двух смежных треугольников? Да, так как нами взяты треугольники равные.

3. Правильный ли получился шестиугольник? Чтобы ответить на этот вопрос, надо сравнить его стороны и углы. Стороны *AB*, *BC*, *CD*.. равны, потому что мы взяли равные между собой треугольник. Углы же *FAB*, *ABC* и т. д. равны, ибо каждый из них равен 120°.

Итак шестиугольник *ABCDEF*—правильный.

4. Как построить правильный шестиугольник? Так как $AO=BO=CO$..... , то вокруг правильного шестиугольника можно описать окружность, которая пройдет чрез все его вершины; и тогда сторона правильного шестиугольника *AB* будет равна радиусу окружности *OA*.

Отсюда выводим такой способ построения правильного шестиугольника. Опишем окружность. Не изменяя расстояния между ножками циркуля, поставим одну из них на окружность, напр. в точку *A*, а другой проведем маленькие дуги (засечки), которые пересекли бы окружность в точках *B* и *F*. Начертив диаметр *AD*, повторим то же самое, поставив ножку циркуля в точку *D*. Получим еще 3 вершины шестиугольника *C*. *D* и *E*. Теперь остается соединить точки *A* и *B*, *B* и *C*, *C* и *D* и т. д.

Задача 159. В школьном саду обозначить шнуром место для правильной шестиугольной клумбы.

Составление правильных многоугольников из равных равнобедренных треугольников. 1. Прежде всего решим вопрос, какой угол может поместиться целое число раз на плоскости вокруг точки?

Очевидно, угол должен иметь число градусов, равное

$$\frac{360^{\circ}}{2},\ \frac{360^{\circ}}{3},\ \frac{360^{\circ}}{4},\ \frac{360^{\circ}}{5},\ \frac{360^{\circ}}{6},\ \frac{360^{\circ}}{7}\ \text{и т. д.}$$

Вообще же он будет иметь $\frac{360^{\circ}}{n}$, где n — целое число.

2. Чтобы составить из равных равнобедренных треугольников правильный восьмиугольник, мы должны взять такие треугольники, у которых углы при вершине равны 45°, ибо $360^{\circ}:8=45^{\circ}$.

Задачи. 160. Какой угол при вершине должны иметь равные равнобедренные треугольники, чтобы из них можно было составить правильный 12-ти-угольник? Каковы будут углы у этого многоугольника?

161. Какой правильный многоугольник мы можем составить

из равных равнобедренных треугольников, имеющих угол при вершине, равный 1°? 2°? 3°? 4°? 5°? 6°? 9°? 10°? 12°? 15°? 18°? 20°? 24°? 30°? $32\frac{8}{11}^\circ$? 36°? 40°? 45°? $51\frac{3}{7}^\circ$? 60°? 72°? 90°? 120°?

3. Составив из равных равнобедренных треугольников какой либо правильный многоугольник, напр. правильный шестиугольник (черт. 102) или восьмиугольник, мы увидим, что его вершины лежат на равных расстояниях от общей вершины O всех треугольников. Приняв точку O за центр, можно начертить такую окружность, которая пройдет чрез вершины многоугольника. Окружность такая называется *описанной*, а многоугольник—*вписанным*.

Вокруг каждого правильного многоугольника можно описать окружность, которая пройдет чрез все его вершины.

Построение правильных многоугольников. 1. Как строится правильный шестиугольник, мы уже знаем: это делается с помощью окружности.

Чтобы построить правильный треугольник, вписанный в окружность, достаточно соединить вершины правильного шестиугольника через одну.

Задача 162. Как построить правильный двенадцатиугольник?

2. Чтобы построить правильный четыреугольник (квадрат), вписанный в круг, достаточно провести два взаимно-перпендикулярных диаметра и концы их соединить.

Задачи. 163. Как, имея уже вписанный в круг квадрат, построить правильный восьмиугольник?

164. Начертив равносторонний треугольник, сторона которого равна 5 см., измерить его высоту. Сравнить результат с произведением $5 \times 0{,}87$. Высота всякого равностороннего треугольника составляет 0,87 его стороны.

165. Из круглого бревна надо вытесать столб с квадратным основанием. Сторона квадрата должна быть равна 10 см. Какого диаметра надо взять бревно, чтобы обрезков получилось как можно меньше.

Указание. Задачу можно решить двумя способами: а) вокруг квадрата, сторона которого 10 см., описать окружность; б) вычислить диаметр круга, зная, что сторона квадрата, вписанного в него, равна произведению радиуса его на 1,41.

166. Можно ли построить правильный шестиугольник, воспользовавшись двумя равными равносторонними бумажными треугольниками? Можно ли построить правильный восьмиугольник, воспользовавшись двумя равными квадратами?

Симметрия в правильных многоугольниках. Построив с помощью окружности правильный пятиугольник (воспользоваться транспортиром!) и шестиугольник, обратим внимание на то, что оба многоугольника — фигуры симметричные относительно оси. При этом, в пятиугольнике ось симметрии проходит от вершины его к середине противоположной стороны. Поэтому осей симметрии в правильном пятиугольнике пять.

В правильном шестиугольнике одни оси симметрии соединяют противоположные вершины его, другие — средины противоположных сторон. Осей симметрии в правильном шестиугольнике шесть.

Все оси симметрии пересекаются в одной точке, и именно в центре описанной около многоугольника окружности.

Задача 167. Отчего правильными многоугольниками пользуются часто в орнаментах?

Из каких правильных многоугольников можно составить паркет? 1. Мы уже знаем, что угол правильного треугольника равен 60°, угол правильного четыреугольника 90°.

Чему равен угол правильного пятиугольника? Составим правильный пятиугольник из пяти равных равнобедренных треугольников. Зная, что угол при вершине каждого такого треугольника равен 72°, вычислим углы его при основании, а затем найдем угол правильного пятиугольника.

Задача. 168. Правильный многоугольник имеет n углов. Написать формулу, выражающую его угол.

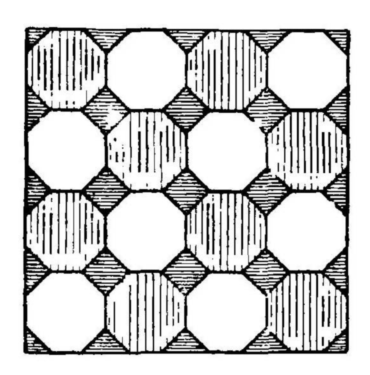
Вычислить по этой формуле угол 8-угольника! 15-угольника!

Угол правильного

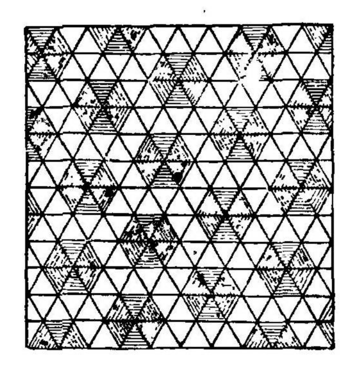
3-угольника		равен	60°
4	»	»	90°
5	»	»	108°
6	»	»	120°
8	»	»	135°
9	»	»	140°
10	»	»	144°

2. На чертеже 105 изображен паркет, составленный из

равных правильных шестиугольников. Вокруг каждой их вершины располагаются три шестиугольника, и помещаются три их угла. Отсюда ясно, что из равных правильных многоугольников можно составить паркет только тогда, когда



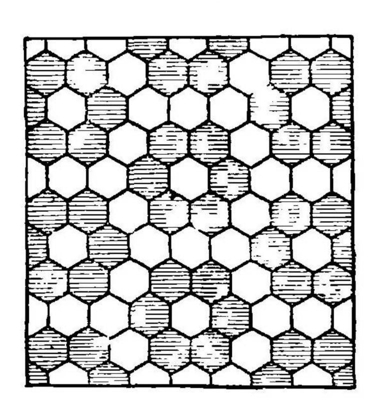
Черт. 103.



Черт. 104. Паркет, составленный из равносторонних треугольников.

угол этого многоугольника укладывается на плоскости вокруг точки целое число раз. Из таблицы, напечатанной выше, понятно, что паркет можно составить только из правильных треугольных (черт. 104), четыреугольных и шестиугольных плиток, ибо числа 60°, 90° и 120° содержатся в 360° целое число раз.

Если составить паркет из равных правильных восьмиугольников, то между ними образуются квадратные промежутки (черт. 103).



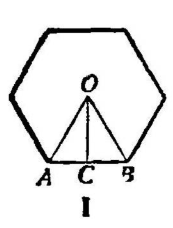
Черт. 105. Паркет, составленный из правильных шестиугольников.

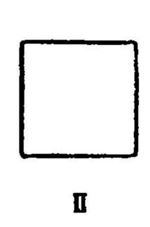
Пчелиные соты. Основанием ячейки пчелиных сот служит правильный шестиугольник. Спрашивается, отчего пчелы из трех правильных многоугольников — треугольника, четыреугольника и шестиугольника, которые могли бы служить основаниями ячеек, избрали шестиугольник?

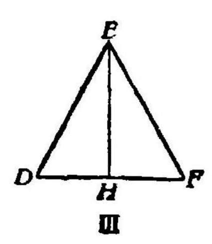
Вообразим себе три ячейки: одна имеет форму пра-

вильной шестигранной призмы, другая—правильного прямоугольного параллелепипеда и третья—правильной трехгранной призмы. Если периметры оснований и высоты этих ячеек будут равны, то на боковые стенки их потребуется одно и тоже количество воску. Спрашивается, какая из этих ячеек будет обладать наибольшей вместимостью?

Приготовим из бумаги три ячейки—в виде правильного шестигранника, четырехгранника и трехгранника. Высота каждой из них пусть будет 1 см., а периметр основания 6 см. Вычислим площади их оснований. Стороны шестиугольника, квадрата и треугольника будут равны 1 см.; 1,5 см.; 2 см. (черт. 106). В равностороннем треугольнике высота составляет 0,87 (с ошибкой меньшей 0,005) его стороны. Площадь шестиугольника I будет равна 2, 61 кв. см., площадь квадрата II 4 кв. см., площадь треугольника III 1,74 кв. см. Отсюда видим, что вместимость шестигранной призмы будет наибольшая.







Черт. 106.

Задачи. 169. Вычислить площадь равностороннего треугольника, периметр которого 60 см. Высота его составляет 0,87 стороны. (Число 0,87 дано с ошибкой меньшей 0,005. Вычислить границу погрешности площади).

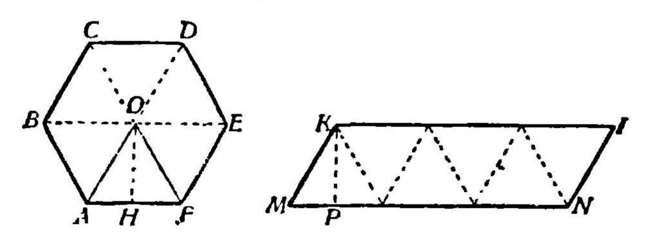
170. Вычислить площадь правильного шестиугольника, периметр которого 60 см.

Площадь правильного многоугольника. Правильный шестиугольник *ABCDEF* (черт. 107) разделен радиусами на 6 равных треугольников. Высота *OH* одного из них называется апофемой.

1. Разрезав правильный шестиугольник по диагоналям, получим 6 треугольников, из которых можно составить параллелограмм *MKJN*. Основание параллелограмма есть полупериметр многоугольника. Высотой *KP* параллелограмма служит апофема *OH* шестиугольника. По-

этому, чтобы вычислить площадь правильного шестиугольника, можно его полупериметр умножить на апофему.

2. Пусть требуется узнать площадь правильного многоугольника, имеющего n сторон. Сторона его равна a; апофема—h.



Черт. 107. Правильный шестиугольник I превращен в параллелограмм II. Основание MN—полупериметр шестиугольника.

Найдем полупериметр многоугольника:

$$\frac{a.\ n}{2}$$

Умножив полупериметр на апофему, получим площадь правильного многоугольника S:

$$S=\frac{a.\ n}{2}\cdot h.$$

Задачи. 171. Начертив правильный шестиугольник, построить равнобедренный треугольник, площадь которого была бы равна площади этого шестиугольника, а основание—полупериметру шестиугольника.

172 Фундамент шестигранной башни ограничен двумя правильными шестиугольниками. Сторона одного равна 3 саж., сторона другого 2,67 саж. Зная, что высота каждого равностороннего треугольника составляет 0,87 его стороны, вычислить площадь основания фундамента. При вычислении в результатах действий можно ограничиваться тремя цифрами.

ГЛАВА IV.

Объемы многогранников.

18. Объем куба, параллелепипеда и призмы.

Многогранник есть геометрическое тело, все стороны которого плоские. Куб, прямоугольный параллелепипед, прямой параллелепипед, трехгранная и многогранная призма, пирамида—многогранники. Существуют и другие виды многогранников.

Объем куба. Чтобы вычислить объем куба, надо его ребро возвысить в куб.

Пусть его ребро заключает a линейных единиц, а объем—V кубических единиц. Тогда

$$V=a.\ a.\ a=a^3,$$

Объем прямоугольного параллелепипеда. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений (трех ребер, выходящих из одной вершины. Ч. I, стр. 65).

Пусть его ребра a, b и c; объем V. Тогда

$$V=a.\ b.\ c,$$

где a, b и c—числа линейных единиц, а V—число кубических единиц.

Объем прямого параллелепипеда. Объем прямого параллелепипеда равен произведению трех его измерений. Измерениями его служат—сторона, соответствующая ей высота основания и боковое ребро параллелепипеда. Обозначив их a, h и H, напишем объем

$$V=a.\ h.\ H.$$

Задачи. 173. 1 арш.=0,71 метра. Какую часть куб. метра занимает куб. аршин? Ограничиться в ответе двумя цифрами.

174. Сколько в одной куб. сажени кубических метров, если 1 м.=0,47 саж.? Ограничить ответ двумя цифрами.

175. Сколько куб. сажен воздуха находится в классе, длина, ширина и высота которого $3^2/_3$ саж., $2^1/_4$ саж., $1^2/_3$ саж.? Сколько в этом классе можно посадить учеников, если на каждого ученика полагается $^3/_4$ куб. саж. воздуха?

176. Измерьте объем воздуха своего класса. Вычислите, какой объем воздуха приходится на каждого ученика? Сравните полученное число с тем объемом воздуха, какое полагается на каждого ученика (смотрите предыдущую задачу).

177. Вычислите вес воздуха, находящегося в вашем классе, зная, что 1 куб. фут комнатного воздуха весит $^1/_{12}$ фун. Вычислите атмосферное давление воздуха на пол вашего класса, зная что он давит на поверхность в 1 кв. дюйм с силою $16^1/_3$ фун. Сравните оба числа: во сколько раз второе число больше первого? (Ответ ограничить двумя цифрами).

178. Сколько кубических метров земли надо вырыть для фундамента, имеющего форму прямоугольника, наружные размеры которого 14,5 м.$\times$7,2 метр.? Ширина фундамента 0,9 м., а глубина 1,5 метра. В ответе получить две цифры.

179. Удастся ли вам поднять прямоугольный столб из сырой березы, размеры которого 10 арш.$\times$0,3 арш.$\times$0,3 арш.? Удельный вес березы 0,9 (т.-е. 1 куб. десим. березы весит 0,9 килогр.); 1 метр=1,4 арш.

180. Сколько весят 5 листов кровельного железа? Длина каждого листа 2 арш., ширина 1 арш., толщина $^1/_{60}$ дюйма. Вес одного куб. см. железа 7,8 гр.; 1 дюйм=2,5 см.; 1 фунт=410 гр. В ответе сохранить 2 первых цифры.

181. Железный прямоугольный ящик, весящий 12 фун., имеет ребра 15,5 дюйм.$\times$12 дюйм.$\times$10,4 дюйма. Какой груз надо положить в ящик, чтобы он погрузился в воду до краев? 1 куб. дюйм воды весит 0,04 фунт.

182. Сколько понадобится кирпичей, чтобы сложить фундамент для машины в виде куба, сторона которого равна 1 саж.? Кирпич имеет размеры 6 в.$\times$3 в.$\times$1,5 вершк. Размеры кирпича надо увеличить на 0,25 вершк. на швы, т.-е. на промежутки, заполненные известкой. При вычислении сохранить первые три цифры слева, а результат получить в круглых сотнях.

Замечание: при постройке стен принимают, что на 1 куб. саж. стены идет круглым числом 3200 кирпичей. Сравните это число с полученным вами числом.

183. Сколько приблизительно пойдет кирпичей на наружные стены дома, имеющего длину 15 арш., ширину 10 арш. и высоту 12 арш.? При этом стены до половины высоты предполагается делать толщиной в 3 кирпича, а остальную часть в 2 кирпича. Кирпичей идет на 1 кв. сажень поверхности стены 1230 штук, при толщине стены в 3 кирпича, и 820 штук, при толщине стены в 2 кирпича.

184. Какую глубину будет иметь вода, вес которой 65,45 гр., если ее вылить в прямоугольный сосуд, имеющий длину 5,5 см. и ширину 3,4 см.?

185. На барку, имеющую 45 м. длины и 12 м. ширины, поставлен паровоз в 54 тонны (тонна есть вес одного куб. метра воды, или 1000 килогр.). На какую глубину погрузилась от этого барка в воду?

186. Сколько человек надо посадить на ту же барку, считая вес каждого человека 72 килогр., чтобы барка погрузилась на 0,25 метра?

187. Во сколько раз уменьшится объем прямоугольного параллелепипеда, если все ребра его уменьшим в 5 раз! Увеличим в 3 раз! в 10 раз!

Объем призмы. Объем трехгранной призмы равен площади ее основания, умноженной на высоту (ч. I, стр. 108). Когда призма прямая, то высотой ее служит ребро. Обозначив сторону и соответствующую ей высоту основания призмы через a и h, высоту призмы через H, найдем объем трехгранной призмы:

$$V = \frac{a.\ h.\ H}{2}$$

Объем каждой призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

Задачи. 188. Вычислить объем трехгранной призмы, основание которой имеет форму равностороннего треугольника. Высота призмы 10 см., стороны треугольника 10 см. Высота равностороннего треугольника составляет 0,87 его стороны.

189. Золотой жетон имеет форму параллелепипеда, основанием которого служит ромб. Диагонали ромба равны 30 мм. и 25 мм. Вес пластинки 7,24 гр. Какова толщина пластинки? Уд. вес золота 19,3.

190. Основание чугунной пластины — трапеция, параллельные стороны которой 4,8 десим. и 9,5 десим.; толщина пластины 5 см. Вычислить ее вес, зная что куб. десим. чугуна весит 7,2 килогр.

191. Сечение канала имеет форму равнобокой трапеции, основания которой 95 фут. и 85 фут. Глубина канала 16 фут. Сколько куб. сажен воды пройдет чрез сечение канала в 1 секунду, если скорость течения воды в канале 1,5 версты в час?

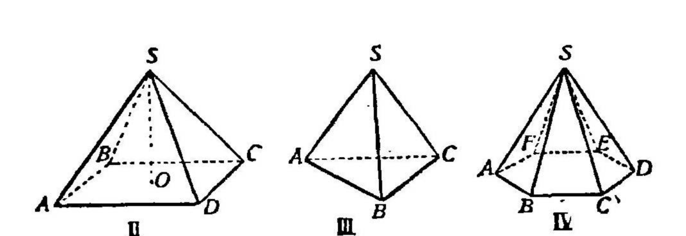
192. Скорость реки в данном месте 0,8 метра в секунду. Спрашивается, сколько кубических метров воды пройдет в секунду чрез поперечное сечение реки, изображенное на стр. 75? Сколько тонн будет весить эта вода?

193. Измерьте площадь поперечного сечения вашей реки, как это указано на стр. 75, и ее скорость, следя за предметом, который уносится течением реки. Вычислите сколько куб. метров воды проходит чрез поперечное сечение реки в секунду.

194. Поперечный разрез железнодорожной насыпи имеет форму равнобокой трапеции. Верхнее ее основание CD=2,6 саж.; о нижнем основании AB известно следующее: если опустить из точки C перпендикуляр CE на AB, то CE=0,5 саж. AE=0,75 саж. Вычислить сколько куб. сажен земли потребовалось на 1 версту насыпи?

19. Пирамида.

Описание пирамиды. Крыша будки, изображенной на черт. 108, I имеет форму п и р а м и д ы. На чертеже изображены три пирамиды II, III, IV. У пирамиды II основанием служит



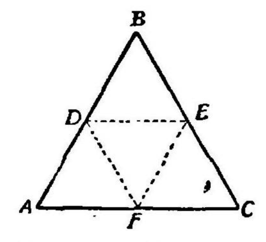
Черт. 108. Пирамиды II—четырехгранная, III—трехгранная, IV—шестигранная.

четырехугольник; боковых граней у нее тоже четыре. Пирамида называется четырехгранной. Пирамида III—трехгранная, пирамида IV—шестигранная. Основанием пирамиды может быть любой многоугольник; боковые стороны—треугольники, вершины которых сходятся в одной точке. У правильной пирамиды основанием служит правильный многоугольник и боковыми гранями—равнобедренные треугольники.

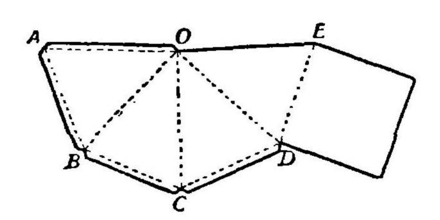
Перпендикуляр SO (черт. 108, II) из вершины S пирамиды на основание называется ее высотой.

Изготовление пирамиды. 1. На черт. 110 изображена развертка поверхности четырехгранной пирамиды. Основание ее квадрат. Боковые грани—равные между собой равнобедренные треугольники, и потому $AO=BO=CO=DO=EO$. Так как точки A, B, C, D и E лежат на одном и том же расстоянии от точки O, то они лежат на дуге, центр которой находится в точке O. Основания AB, BC, CD и DE треугольников равны стороне DE квадрата.

2. Развертка поверхности трехгранной пирамиды, у которой грани—равные между собою равносторонние тре-



Черт. 109. Развертка правильного четырехгранника.



Черт. 110. Развертка правильной четырехгранной пирамиды.

угольники, изображена на черт. 109. Такая пирамида называется правильным четырехгранником.

3. Боковые грани пирамиды составляют ее боковую поверхность. Боковая поверхность вместе с основанием пирамиды составляют полную ее поверхность.

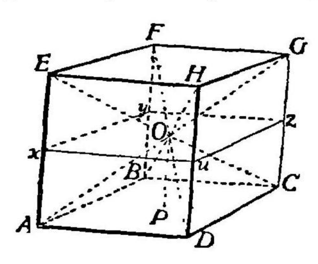
Задачи. 195. Вычислить площадь боковой поверхности данной правильной трехгранной пирамиды, сделав необходимые для этого измерения. Вычислить ее полную поверхность.

196. Крыша будки, изображенной на стр. 92, имеет форму пирамиды, у которой основание квадрат со стороной в 2 саж., а прочие грани—равные равнобедренные треугольники, высоты которых равны 1,3 саж.

Сколько дней работы (на 1 кровельщика), железа и гвоздей потребуется, чтобы сделать крышу, если на 1 кв. саж. её идет 0,45 дней работы, 5,33 листов двух аршинного листового железа и 27 гвоздей.

Объем пирамиды. 1. Взяв куб, сделанный из проволоки или из прутиков (черт. 111), натянем в нем нити по диагоналям AG, DF, CE и BH. Нитями обозначатся 6 равных между собою четырехгранных пирамид, вершины

которых сходятся в точке O; основаниями их служат грани куба. Назовем эти пирамиды буквами: $OABCD$, $OEFGH$, $OAEHD$, $OAEFB$, $OBFGC$, $ODHGC$. Объем куба равен ушестеренному объему одной такой пирамиды.

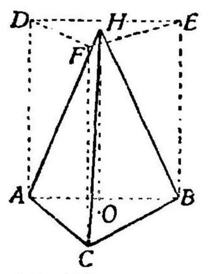


Черт. 111. Куб разделен на 6 равных пирамид. Одна из них *OABCD* составляет одну треть параллелепипеда *ABCDxyzu*.

Представим себе параллелепипед $ABCDxyzu$, составляющий половину куба, и пирамиду $OABCD$. Высотой этой пирамиды служит перпендикуляр OP, опущенный из вершины ее O на основание. Так как вершина ее O лежит на верхнем основании параллелепипеда, то параллелепипед и пирамида имеют равные высоты. Кроме того они имеют и общее основание $ABCD$. Так как данный куб равен ушестеренному объему пирамиды $OABCD$, то объем параллелепипеда равен тройному объему той же пирамиды. Значит объем пирамиды равен одной трети объема параллелепипеда имеющего с нею одинаковые основание и высоту.

2. В предыдущем опыте мы наблюдали особую пирамиду и особый параллелепипед, который составлял половину куба.

Оказалось, что объем этой пирамиды равен одной трети объема параллелепипеда. Естественно возникает вопрос, не будет ли этот вывод относиться и ко всякой пирамиде?



Черт. 112. Объем пирамиды *HABC* равен трети объема призмы *ABCDEF*.

На чертеже 112 изображена призма $ABCDEF$ и пирамида $HABC$, имеющая с нею одинаковые основание и высоту. В полных курсах геометрии доказывается, что объем пирамиды $HABC$ равен одной трети объема призмы $ABCDEF$.

3. Возьмем сделанные из плотной бумаги открытые с одной стороны призму и пирамиду, которые имеют равные основания и равные высоты. Если пропитать их расплавленным горячим воском или парафином, то

в них свободно можно наливать воду. Будем наполнять водой пирамиду и переливать воду в призму.

Сколько раз придется это сделать, чтобы наполнить призму?

Объем пирамиды равен одной трети объема призмы, имеющей с нею равные основания и равные высоты.

Задачи. 197. Вычислить объем пирамиды с квадратным основанием, высота которой 12 дюймов, а сторона квадрата 6 дюймов.

198. Насыпана пирамидальная куча грунтовой земли, основание которой составляет квадрат со стороной 5 фт. 7 дюймов, а высота равна 4 фт. 2 дюйм. Вычислить ее вес, зная что 1 куб. саж. земли весит 760 пуд.

199. Самая большая Египетская пирамида имеет высоту 148 м.; основание же её—квадрат, сторона которого 233 м. Каков ее объем? Сколько понадобилось бы поездов по 20 вагонов в каждом, чтобы подвезти необходимый для ее постройки материал, если каждый вагон поднимает 10 тонн (10000 кгр.), а 1 куб. метр. камня весит 2700 кгр.?

4. Предположим, что площадь основания призмы, изображенной на черт. 112, равна 48 кв. см., и ее высота 15 см.

Тогда ее объем равен

$$48 \times 15 = 720 \text{ (кб. см.)}.$$

Объем пирамиды *HABC*, изображенной на том же чертеже, будет равен одной трети объема призмы *ABCDEF*:

$$720 \text{ кб. см.} : 3 = 240 \text{ кб. см.}$$

Вместо того чтобы 48 умножить на 15 и затем произведение делить на 3, проще множитель 15 разделить на 3 и затем 48 умножить на 5. Оба действия можно обозначить так:

$$48 \times (15 : 3) = 240 \text{ (кб. см.)}.$$

Объем пирамиды равен произведению площади ее основания на треть высоты.

о записать короче. Пусть s — пло-
миды, H — ее высота и V — ее

$$V = s \cdot \frac{H}{3}.$$

слить объем пирамиды, у которой
етр.
иде формулы объем трехгранной пира-
основания a; высота, соответствующая
е пирамиды H. Найти числовую вели-
15 см.; h=8 см.; H=10 см.
ика, изображенного на стр. 92, имеет
нием которой служит квадрат. Сторона
фут. Высота пирамиды 6 фут. Сколько
титься под крышей, если 1 куб. саж.

ГЛАВА

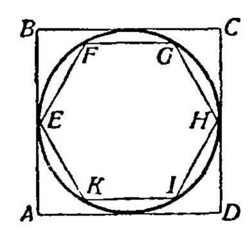
Круг. Цилиндр.

20. Длина окруж

И жизнь, и наука ставят пре
рые требуют умения измерять дли
Вот некоторые из них:
Узнать длину окружности к
На какое расстояние передв
одном обороте его колеса? При о
средней его оси?
Астрономы умеют измерить
узнать ее окружность?
Встречаются обратные задачи
Легко измерить обхват (окру
рева. А как узнать его поперечни
Ученые измерили меридиан з
узнали радиус земного шара?
Измерение кривых линий не
отрезки прямой линии. Напр., дли
ченной на доске, мудрено измерит
или вершками. Диаметр же ее из
Мы научимся вычислять длину о
дачи в роде тех, которые упомян
во сколько раз окружность длинне

Отношение длины окружности к
чертеже 113 в круг вписан прави
около того же круга описан квадр
ности R, то периметр квадрата $8R$
ника $6R$. Отсюда видим, что окр

меньше $8R$. Значит в длине окружности заключается больше трех ее диаметров и меньше четырех диаметров. Иначе говоря, отношение окружности к диаметру ее равно 3 с какой-то дробью.



Черт. 113. Длина окружности больше трех ее диаметров и меньше четырех диаметров.

2. Соберем ряд круглых предметов разной величины. Лучше, если этим займется сразу целый класс. Каждый берет себе круглый предмет—гирю (от часов или килограмм), колесики, банку, сита разных размеров, кружки и т. п. Каждому дается полоска миллиметровой бумаги шириной в 1 см. Если таковой нет, то придется воспользоваться полоской из обыкновенной бумаги.

Этой полоской мы обтягиваем круглый предмет так, чтобы концы ее находили один на другой, и затем одним уколом булавки прокалываем оба конца. На полоске получатся две метки. Выпрямив полоску, сосчитаем, сколько сантиметров и миллиметров заключается между двумя метками. Таким образом будем знать длину окружности предмета. Надо стараться, чтобы ошибка измерения была меньше 1 мм.

Далее той же полоской измеряем поперечник предмета, иначе говоря, диаметр окружности.

Теперь каждый узнает, во сколько раз окружность длиннее ее диаметра, иначе говоря, каждый вычисляет отношение длины окружности к длине диаметра. В частном ограничимся только сотыми долями.

Если измерения у всех произведены внимательно и аккуратно, то частные получатся близкие друг другу и будут разниться на несколько сотых (не более 10 сотых).

Малая разница между частными дает нам право предположить, что отношение окружности к диаметру есть одно и то же число, или постоянное число для каких угодно окружностей—больших и малых. Чтобы узнать это отношение несколько точнее, поступаем так. Одни из полученных отношений — больше истинного, другие—меньше. Если сложим те и другие, то недостатки одних покроются избытками других. И если разделить

полученную сумму на число слагаемых, то получим среднее отношение, которое будет наиболее близким к истинному. Число, которое мы таким способом получаем, называется средним арифметическим числом.

Но все же и это число не будет точным, и нам интересно знать, чему было бы равно отношение окружности к диаметру, если бы окружность была измерена совершенно точно. Так как это отношение выражается дробью, которая заключает бесконечное множество цифр, то мы ограничимся только тремя цифрами и будем считать, что отношение окружности к ее диаметру равно 3,14.

Длина окружности. Задача 203. Диаметр окружности равен 1 метру $=100$ см.; чему равна длина ее?

Обозначив диаметр окружности через d, получим ее длину l:

$$l=3{,}14\,.\,d.$$

Обозначив радиус окружности через, r, мы получим диаметр $2r$ и длину ее l:

$$l=6{,}28\,.\,r.$$

Когда длина окружности дана, а ищется ее радиус, то длину его найдем по формуле

$$r=\frac{l}{6{,}28}.$$

Задачи 204. Начертить окружность радиуса 1 см. Начертить отрезок прямой такой же длины, как окружность, приняв, что окружность длиннее диаметра в 3 раза! в 3,1 раза! в 3,14 раза! Какая разница получается между отрезками?

а) Вычислить длину окружности, радиус которой 1 см., приняв, что отношение окружности к диаметру равно 3. Какую погрешность при этом мы допустили? Какую часть более точной длины окружности составляет эта погрешность?

Число, показывающее, какую часть точного числа составляет погрешность, называется относительной погрешностью.

б) Радиус окружности 10 см. Вычислить длину ее, приняв отношение окружности к диаметру равным 3. Какую погрешность мы при этом совершаем? Вычислить относительную погрешность. Сравнить относительные погрешности в обеих задачах а) и б).

205. Чему равна длина окружности, если ее радиус 1 см.? 3 см.? 3,5 см.? 1 дюйм? диаметр 3,5 см.?

206. Радиус окружности 3,5 см. измерен с ошибкой меньшей 0,1 см. Вычислить длину окружности и границу ошибки полученного числа.

207. Начертить окружность на дворе при помощи шнура длиной 2,5 саж. Какую длину она имеет?

208. Лошадь гоняют на корде (веревка) длиной в 15 арш. Какое расстояние она пробежит, сделав один круг? 100 кругов?

209. Колесо имеет диаметр длиной 1 арш. 6 верш. Надо сделать для него обод из железной полосы, поперечное сечение которой $1/2 \times 2^1/_2$ кв. дюйм. Сколько фунтов будет весить обод, если 1 куб. дюйм железа весит 0,308 фунт.?

210. Сколько раз оборотится это колесо (зад. 209), сделав одну версту? проехав известное нам расстояние между двумя селениями?

211. Два колеса *O* и *o*, диаметры которых 1,5 м. и 0,3 м. соединены бесконечным ремнем. Сколько оборотов в минуту делает колесо *o*, если колесо *O* делает их 75?

212. Диаметры колес *D* и *d*. Число оборотов в минуту, которое делает большее колесо, *N*. По какой формуле можно вычислить число *n* оборотов, которое делает в минуту меньшее колесо?

213. Два зубчатые колеса *O* и *o* имеют — одно 100 зубцов, другое 15. Сколько оборотов сделает меньшее колесо в то время, когда большее делает 60 оборотов?

214. Шестерня средней оси в велосипеде имеет 20 зубцов, а зубчатка заднего колеса 8. Диаметр этого колеса—28 дюйм. Какое расстояние сделает велосипед за то время, в которое шестерня сделает один оборот? С какой скоростью (в час) будет двигаться велосипед, если шестерня средней оси будет оборачиваться каждую секунду один раз? Для простоты вычислений принять отношение окружности к диаметру равным $3^1/_7$.

215. Выбрать толстое дерево и, измерив его окружность полоской бумаги, вычислить поперечник (диаметр) его. То же сделать с круглой печкой в комнате.

216. В Америке есть дерево—веллингтония, а в Австралии—эвкалипт, которое достигает в обхвате 30 метров. Вычислить его поперечник.

217. Чему равен радиус окружности, длина которой 3,14 см.? 6,28 см.? 78,5 см.? 87,92 см.? 0,7536 см.? 110,04 дюйм?

218. Обхват дерева заключает 3,14 см. Вычислить его диаметр, приняв отношение окружности к диаметру равным 3! равным 3,14! Какая ошибка получается в первом случае?

219. На глобусе измерить четверть его меридиана и вычислить его радиус.

220. Одна четверть земного меридиана имеет 10 000 км. Вычислить радиус меридиана. Ограничиться в ответе тремя первыми цифрами, заменив цифру единиц нулем.

221. Радиус экватора—6370 км. Сколько километров заключает каждый градус экватора?

222. Какой путь делает каждая точка экватора за 1 сутки? за 1 час? за 1 сек? В последнем вопросе сутки надо взять звездные, которые короче солнечных на 4 минуты. Ответ ограничить тремя цифрами.

223. Расстояние по экватору от одного берега Южной Америки до другого занимает 30°. Вычислить это расстояние, зная, что радиус экватора—6370 км.

224. Радиус тропика равен 5860 км. Вычислить длину одного градуса долготы по тропику. Радиус полярного круга 2550 км. Вычислить длину дуги этого круга, равной 40°.

225. Радиус окружности равен 10 см. Чему равна дуга, содержащая 1°? 10°? 45°? 90°? Обозначив радиус окружности через r, написать формулу для вычисления дуги, имеющей n°.

226. Дуга окружности, заключающая 35°, равна 3,5 см. Составить уравнение, из которого можно узнать ее радиус.

227. Окружность проведена радиусом в 10 см. Сколько градусов имеет дуга длиной в 10 см.? Решить с помощью уравнения.

228. Расстояние от Земли до Солнца 149 миллионов километров. Вычислить путь, пробегаемый Землей вокруг Солнца.

229. Какой путь пробегает Земля в секунду, если она делает полный оборот вокруг Солнца в 365 дней 6 час? При вычислении в результатах ограничиться тремя цифрами, заменяя прочие цифры нулями.

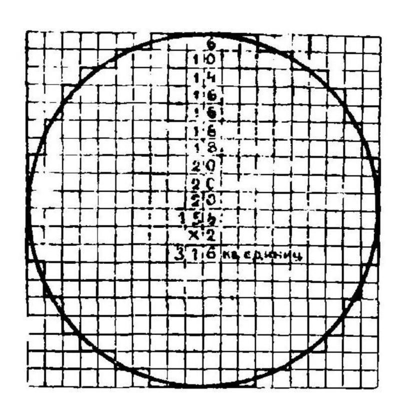
230. Какой путь проходит в секунду конец часовой стрелки на ваших часах?

231. Имеется моток проволоки, внутренний диаметр которого 8 см., а внешний 12 см. Приняв, что средний диаметр одного витка равен среднему арифметическому числу этих чисел, вычислить длину всей проволоки, которая содержит 100 витков.

21. Площадь круга.

1. Начертим на бумаге как можно точнее сетку из квадратных клеточек. Сторона каждой клеточки 1 см. На сетке опишем окружность радиусом 10 см. (черт. 114). Производя подсчет клеточек, заключающихся

в круге так, как мы делали это раньше (стр. 73—74), найдем, что площадь круга равна примерно 316 кв. см.



Черт. 114. Измерение площади круга при помощи клетчатой бумаги.

2. Такой способ измерения площади круга не вполне удобен. Выгоднее был бы такой способ, который позволял бы нам вычислить площадь круга, измерив его радиус.

Сделаем как можно аккуратнее круг, диаметр которого равен 20 см., и правильные многоугольники — 6-угольник, 12-угольник и 24-угольник того же диаметра.

Вычислим их площади:

	Сторона.	Полупериметр.	Апофема.	Площадь.
У 6-угольн.	10 см.	30 см.	8,7 см.	30.8,7 =261 кв. см
» 12 „	5,18 „	31,1 „	9,66 „	31,1.9,66=300 „ „ (приблиз.).
» 24 „	2,61 „	31,3 „	9,22 „	31,3.9,22=311 кв. см. (приблиз.).

Вкладывая в круг сперва 6-угольник, затем 12-угольник и наконец 24-угольник, мы убеждаемся, что, чем больше сторон у многоугольника, тем большую часть круга он заполняет, и тем меньшая его часть остается незаполненной (черт. 115). Если бы мы стали точно так же вкладывать в круг 48-угольник, затем 96-угольник и т. д., то мы перестали бы отличать правильный многоугольник от круга.

Будем поэтому вычислять площадь круга так же, как мы вычисляли бы площадь вписанного в круг правильного многоугольника с большим числом сторон. У такого многоугольника апофема отличалась бы весьма

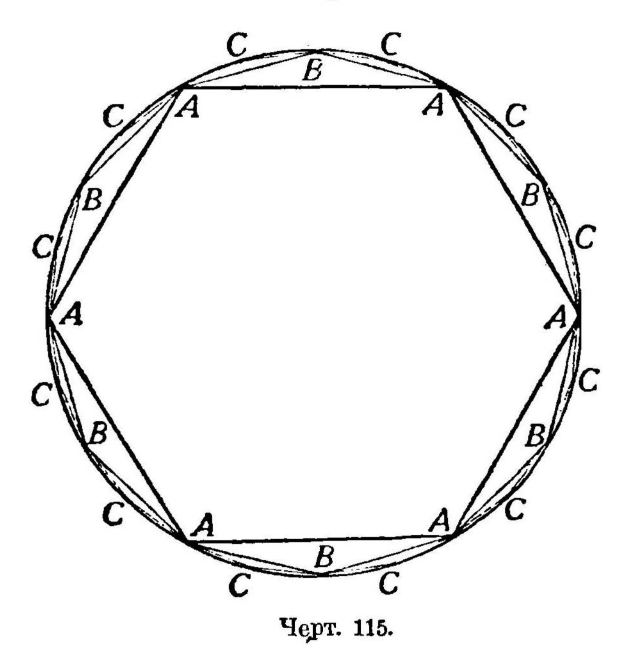
мало от радиуса круга, а полупериметр—от половины окружности. Вычислим площадь круга, радиус которого 10 см. Половина его окружности равна

$$10 \text{ см.} \times 3{,}14 = 31{,}4 \text{ см.}$$

Умножив число 31,4 на 10, получим площадь круга:

$$31{,}4 \times 10 = 314 \text{ кв. см.}$$

Выше мы получим площадь круга 316 кв. см. Погрешность числа 316 кв. см. равна 2 кв. см. Эта погрешность составляет $\frac{1}{157}$ площади круга. Число $\frac{1}{157}$, показывающее, какую часть верного числа составляет погрешность, называется относительной погрешностью.



Черт. 115.

Площадь круга равна произведению его полуокружности на радиус.

Задачи. 232. Вычислить площадь круга, радиус которого 1 см.! 7,5 см.! 2,75 арш.! 3 саж. 2 арш.! диаметр которого 7 см.! 2,5 саж.!

233. Вычислить площадь медного пятачка!

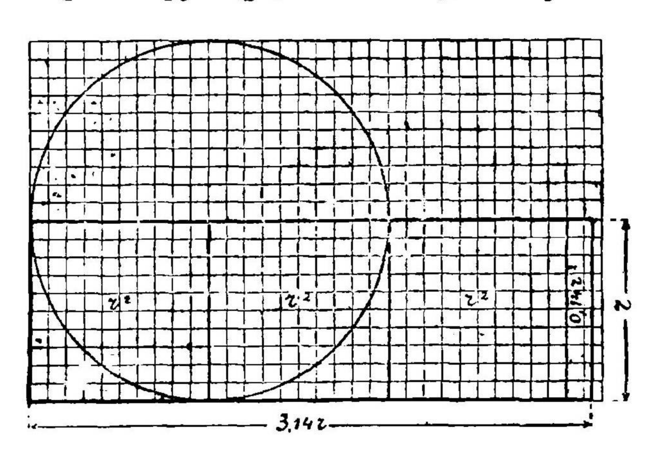
3. Обозначив радиус круга через r, найдем длину окружности l

$$l = 6{,}28 . r,$$

и площадь круга

$$S = 3{,}14 . r^2.$$

4. Площадь круга наглядно можно изобразить так. Начертив круг (рад. = 10 см.), начертим полосу, ширина которой равна его радиусу (черт. 116). На этой полосе отделим: три квадрата, стороны которых равны радиусу круга, десятую часть квадрата и 0,4 одной десятой квадрата, или 0,04 квадрата. Тогда площадь полученного прямоугольника будет равна приблизительно площади круга.



Черт. 116. Площадь круга представлена в виде прямоугольника, одна сторона которого—радиус круга, а другая 3,14 радиуса.

22. Умножение нескольких приближенных чисел.

1. Вычислим площадь круга, радиус которого 8,3 см. измерен с ошибкой меньшей 0,1 см. Число 3,14—также приближенное с ошибкой меньшей 0,005.

Сперва умножаем 8,3 на 8,3:

$$8{,}3 \times 8{,}3 = 68{,}89.$$

Найдем наибольшую ошибку этого произведения:

$$8{,}4 \times 8{,}4 = 70{,}56$$

$$70{,}56 - 68{,}89 = 1{,}67.$$

Так как в произведении 68,89 цифра единиц уже сомнительна, то округлив его, получим 69. Наибольшая ошибка этого числа равна сумме

$$1{,}67 + 0{,}11 = 1{,}78,$$

в которой второе слагаемое 0,11 мы получим, вычитая отброшенную часть 0,89 произведения из 1.

Итак число 69 заключает наибольшую ошибку 1,78; округляя ее, возьмем 1,8.

Теперь надо умножить 3,14 на 69:

$$3{,}14 \times 69 = 216{,}66 \text{ (кв. см.)}.$$

Найдем наибольшую ошибку этого числа. Так как наибольшая ошибка первого числа 0,005, а второго 1,8, то перемножим

$$3{,}145 \times 70{,}8 = 222{,}8076$$

$$222{,}8076 - 216{,}66 = 6{,}1476.$$

В числе 216,66 уже цифра единиц сомнительна. Поэтому возьмем вместо него 217.

Отбрасывая 0,66 при округлении произведения, мы делаем ошибку меньшую 0,4, ибо разность 1—0,66 меньше 0,4. Да кроме того в произведении 216,66 наибольшая ошибка 6,1476. В общем ошибка может достичь 6,5476, или для простоты скажем 7 кв. см.

Итак площадь круга будем считать равной 217 кв. см. с ошибкой меньшей 7 кв. см.

2. Когда над приближенными числами производится умножение, то в произведении получается немало случайных, не имеющих значения цифр. То же имеет место и при делении. Поэтому мы ограничиваем произведение одной сомнительной цифрой, все же случайные цифры отбрасываем.

Предыдущая задача показала, что в случае нескольких сомножителей расчеты, служащие для исчисления наибольшей ошибки, довольно сложны. Тем не менее проделывать их поучительно. Если же желательно избежать их, то можно пользоваться следующим правилом:

Когда над приближенными числами производятся действия умножения и деления, то в произведении и в частном мы сохраняем столько цифр, сколько их в самом коротком из данных неточных чисел.

Напр., перемножая числа 34,5 и 127,7, о которых известно, что их последние справа цифры сомнительны, достаточно в произведении сохранить только 3 цифры.

Надо иметь еще в виду и следующий случай. В некоторых задачах мы встречаем такие данные, как 37,0 саж. или 3,50 метра. Зачем тут нули в конце справа? Нуль в первом числе обозначает, что в измеренной длине уложилось 37 сажен, сверх которых нет ни одной десятой доли сажени. Поэтому ошибку в числе 37,0 саж. можно считать меньшей 0,1 саж. Ошибку в числе 3,50 м. можно считать меньшей 0,01 м. Если бы пришлось умножить 127,7 на 37,0, то во множителе надо считать три цифры, и в произведении, согласно с данным выше правилом, надо сохранить три цифры.

Воспользуемся тем же правилом для решения предыдущей задачи:

$$8{,}3 \times 8{,}3 = 68{,}89 \text{ кв. см., округляя } 69 \text{ кв. см.}$$
$$3{,}14 \times 69 = 216{,}66 \text{ кв. см., округляя } 220 \text{ кв. см.}$$

Понятно, что пользуясь этим правилом, мы избегаем лишних цифр, но наибольшей ошибки в результате не узнаем.

Этим же правилом мы рекомендуем пользоваться и в задачах, которые будут встречаться дальше, в тех случаях, когда вычисления сложны и результаты действий заключают много случайных, лишних цифр.

Задачи. 234. Вырезать из одного и того же куска плотной бумаги как можно аккуратнее круг радиуса 5 см. и квадрат со стороною 5 см. Вычислить, во сколько раз площадь круга больше площади квадрата! Сравните площади круга и квадрата на аптекарских весах!

235. Диаметр проволоки 2,2 мм. Вычислить ее сечение. В ответе ограничиться двумя цифрами.

236. Диаметр проволоки 2,2 мм. Какой груз можно к ней подвесить, не боясь ее разорвать, если при сечении проволоки в 1 кв. см. допустима нагрузка 750 кгр.?

237. Александровская колонна (в Петербурге)—величайшая в свете из всех колонн, сделанных из одного куска гранита,— весит 601200 кгр. Ее диаметр внизу 3,7 метра. С какой силой она давит на каждый кв. сантиметр того круга, на который она опирается?

238. Колонна из кирпича выдерживает безопасно давление в 3 пуда на один кв. дюйм. ее основания. Какой груз выдержит колонна, имеющая диаметр в 3 фута?

239. Дерево имеет в обхвате 285 см. Вычислить площадь его основания.

Написать формулу для вычисления площади круга, длина окружности которого l.

240. Диаметр отверстия стеклянной трубки 0,60 см. Вычислить площадь отверстия.

241. Внутренний диаметр цинковой трубки 2,8 см. Внешний диаметр трубки 3,2 см. Вычислить площадь сечения ее стенки.

242. Два круга, имеющие один и тот же центр, ограничивают на плоскости кольцо. Радиус одного круга R, другого r. Доказать, что площадь кольца равна площади прямоугольника, стороны которого $3{,}14 \cdot (R+r)$ и $R-r$.

243. Сколько потребуется мер песку, чтобы посыпать дорожку вокруг цветочной круглой клумбы? Известно, что радиус клумбы 7 фут., ширина дорожки 4 фута и на каждый кв. фут дорожки идет $^1/_{12}$ меры.

244. Из прямоугольного куска жести, длина и ширина которого 76,0 дюйм. и 56,0 дюйм., вырезать круг наибольшего диаметра. Вычислить площадь получившихся обрезков.

245. Выразить искомую в предыдущей задаче площадь формулой, полагая длину и ширину куска жести a и b.

246. Из квадратного куска жести, сторона которого a, вырезать круг наибольшего диаметра. Найти формулу для вычисления площади обрезков. Чему равна эта площадь, если $a = 2$ дм.?

247. Поверхность шара содержит столько же кв. единиц, сколько их в четырех больших кругах этого шара. Большим кругом шара называется круг, проходящий чрез его центр.

Вычислить площадь поверхности шара, зная, что его радиус 10 см! 2 см!

Написать площадь поверхности шара, обозначив длину его радиуса через r.

23. Как зависят длина окружности и площадь круга от радиуса?

Представим себе пять окружностей. Их радиусы 10 см., 20 см., 30 см., 40 см. и 50 см. Чему будут равны их длины и площади?

Радиус	10 см.	20 см.	30 см.	40 см.	50 см.
Длина окружн.	62,8 см.	125,6 см.	188,4 см.	251,2 см.	314 см.
Площадь круга	314 кв. см.	1256 кв. см.	2826 кв. см.	5024 кв. см.	7850 кв. см

1. Отсюда видим, что, когда радиус окружности увеличивается в два раза, то и длина ее возрастает тоже в два раза. Когда радиус увеличивается в три раза, то длина окружности также увеличивается в три раза и т. д.

Задача 248. Выше дан ряд значений радиуса и длины окружности. Составить из них несколько пропорций.

Если бы радиус мы изменили так, что вместо 10 см. взяли $^3/_4$ этого числа, т.-е. 7,5 см., то длина окружности была бы равна, вместо 62,8 см., трем четвертям этого числа, т.-е. 47,1 см.

Окружности можно считать фигурами подобными.

Окружность и ее радиус — величины пропорциональные, или длина окружности пропорциональна длине радиуса.

Задачи. 249. Длина одной окружности равна 10,5 см. Вычислить длину другой окружности, радиус которой втрое больше.

250. Радиус окружности 10 см., ее длина 62,8 см. Какова длина другой окружности, радиус которой 4 см.? Составить пропорцию, обозначив длину второй окружности через x. Вычислить x из полученного уравнения.

2. Рассматривая написанные выше ряды чисел, мы убеждаемся, что, когда радиус круга увеличивается в два раза, то площадь круга делается больше уже не в два раза, а в дважды-два раза, или в 2^2 раза. Когда радиус увеличивается в три раза, то площадь круга увеличивается в трижды-три раза, или в 3^2 раза и т. д.

Задачи. 251. Вырезать из плотной бумаги один круг радиуса 10 см. и 4 круга, радиусы которых равны 5 см. Будет ли равен вес большего круга весу четырех малых кругов?

252. Диаметры водопроводных труб 1 дм. и 1,5 дм. Во сколько раз сечение второй трубы больше сечения первой трубы? Во сколько раз больше воды дает вторая труба, чем первая?

253. В фотографическом ящике вставляются круглые отверстия (диафрагмы), через которые входит в ящик свет. Радиусы диафрагм 1 мм.; 1,4 мм.; 1,7 мм. и 2 мм. В каком отношении будут площади диафрагм (в круглых числах)? Во сколько раз больше света входит в ящик через вторую диафрагму, чем через первую? через третью, чем через первую и т. д.?

254. Электрический ток входит в дома по проволокам, концы которых соединены с главными проводниками электричества, протянутыми по улице. При этом количество электричества, протекающее по проволоке, пропорционально сечению проволоки. Если диаметры проволок 1 мм., 2 мм., 3 мм. и 4 мм., то в каких отношениях находятся количества электричества, которые эти проволоки проводят?

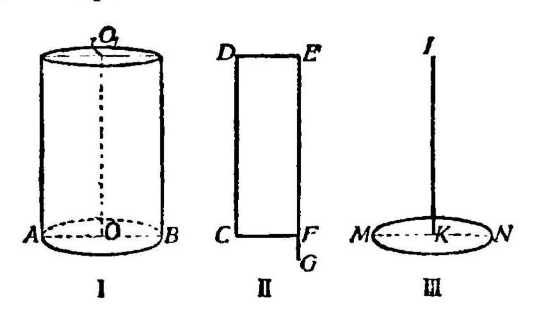
24. Прямой цилиндр.

Описание. 1. Чтобы иметь представление о цилиндре, достаточно вспомнить какую-нибудь жестяную банку. Цилиндр изображен на черт. 117. Верхнее и нижнее основания его—равные и параллельные круги. Боковая поверхность его—кривая поверхность.

2. Образование цилиндра можно представить так. Сделаем из проволоки прямоугольник *CDEF* (черт. II) с кончиком *FG*. Будем его вращать за этот кончик вокруг стороны *EF*. Тогда он опишет тело, которое назы-

вается цилиндром. Сторона же CD его опишет цилиндрическую поверхность. Прямая EF будет **осью** и в то же время **высотой** цилиндра.

3. Образование цилиндра можно представить себе и иначе. Вообразим круг (черт. III), который перемещается вдоль прямой IK, проходящей чрез его центр, оставаясь все время перпендикулярным к ней. Такой круг образует цилиндр.



Черт. 117. I—цилиндр. Этот цилиндр может быть образован или вращением прямоугольника II, или параллельным перемещением круга III.

4. В природе стебли растений и стволы деревьев в некоторой своей части имеют цилиндрическую форму. Ручки, за которые мы берем предметы, валы и колеса, имеют цилиндрическую форму. Объяснить, отчего?

Задачи. 255. Отметить на поверхности цилиндра точку. Провести через эту точку прямую. Сколько прямых удастся провести через эту точку?

256. Вылепив из глины цилиндр, пересечь его так, чтобы сечение было перпендикулярно оси! Параллельно оси! наклонно оси! Какая фигура получается в сечении?

Поверхность цилиндра. 1. Разрезав боковую поверхность цилиндра по прямой линии и отделив от нее верхнее и нижнее основания, мысленно развернем ее. Получим прямоугольник, основание которого имеет такую же длину, как и окружность цилиндра. Высота же прямоугольника равна высоте цилиндра. Полная поверхность цилиндра заключает боковую его поверхность и оба основания.

Задача 257. Радиус основания цилиндра равен 10 см. Высота цилиндра 15 см. Вычислить его боковую и полную поверхность.

2. Обозначим радиус основания цилиндра через r, высоту цилиндра через h. Тогда его боковая поверхность s равна

$$s = 6{,}28 . r . h$$

Полная же поверхность S будет

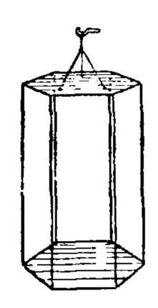
$$S = 6{,}28 \cdot r \cdot h + 6{,}28 \cdot r^2 \text{ или } 6{,}28 \cdot r \cdot (r + h)$$

Задачи. 258. Дан цилиндр (жестяная коробка). Произведя необходимые измерения, вычислить его боковую поверхность! полную поверхность!

259. Взяв лист бумаги, свернуть его так, чтобы образовалась цилиндрическая поверхность. Измерив радиус основания цилиндра и высоту, вычислить боковую поверхность. Проверить полученный результат, развернув лист.

260. Боковая пов. цилиндра равна 0,6 кв. м. Высота его 1,2 м. Обозначив через x радиус, составить уравнение. Найти радиус основания.

261. Полная поверхность цилиндра содержит 3 кв. м. Радиус основания его 0,2 м. Составить уравнение. Вычислить высоту.



Черт. 118. Модель правильной шестигранной призмы.

Объем цилиндра. 1. Сделаем несколько нитяных моделей правильных призм. Вырежем для этого из папки два равных правильных шестиугольника и их вершины свяжем нитями (черт. 118). Получим модель правильной шестигранной призмы. Правильной она называется оттого, что ее основаниями служат правильные многоугольники, а ребра призмы перпендикулярны к основанию.

Сделаем так же 12-гранную и 24-гранную призму. Если бы мы пожелали узнать объем v каждой из этих призм, то должны были бы площадь ее основания s умножить на высоту h:

$$v = s \cdot h$$

2. Переходя от шестигранной призмы к призме 12-гранной, а затем и 24-гранной, мы замечаем, что она все более и более походит на цилиндр. И если бы мы взяли призму с большим числом граней, то глаз уже не отличил бы ее от цилиндра.

Объем цилиндра измеряется по тому же правилу, как и объем призмы:

Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

Задачи. 262. Вычислить боковую поверхность цилиндра и объем его, зная, что радиус его основания и высота равны 3,5 см. и 8 см.! 2 дм. и 3,5 дм!

263. Выбрав стакан по возможности цилиндрической формы и произведя необходимые измерения, вычислить его вместимость. Найти его вместимость с помощью воды и мензурки. Сравнить оба числа. Производя вычисления, ограничиваться в результатах двумя первыми цифрами.

3. Обозначив радиус основания цилиндра через r и высоту его через h, найдем площадь его основания

$$s = 3{,}14 \, . \, r^2$$

и объем v

$$v = 3{,}14 \, . \, r^2 \, . \, h.$$

Задачи. 264. Найти объем металлического цилиндра (напр., гирьки) тремя способами:

1. Измерив радиус его основания и высоту, вычислить объем.

2. Взвесить и, найдя в курсе физики удельный вес данного металла, вычислить объем.

3. Налив в мензурку воды, заметить ее объемь. Погрузить в нее цилиндр и снова отсчитать объем воды и цилиндра вместе.

265. Из латуни вырезан круг. Радиус его 8,6 см.; толщина 2,0 мм. Вычислить его вес, зная, что 1 куб. сантим. латуни весит 8,5 гр.

266. Сколько весит мраморная колонна, имеющая в окружности 2,00 метр. и высоту 7,5 метр. Один куб. десим. мрамора весит 2,65 килогр.

267. На постройку дома требуется перевезти еловые бревна. Средний диаметр бревна 6 верш., длина 9 саж. Сколько таких бревен можно положить на подводу, если 1 куб. фут ели весит 1 пуд, а подвода поднимает от 30 до 40 пудов.

268. Окружность цилиндра l, его высота h. Какой формулой выразится его объем? Вычислить по этой формуле объем ствола дерева, окружность которого 32 дюйма, а высота 19 футов.

269. Вычислить толщину медной круглой пластинки, диаметр которой 7,2 см. и вес 17,4 грамма; вес же одного куб. сантим. меди 8,8 гр. Составить уравнение, приняв за неизвестное толщину пластинки.

270. Радиус круглой пластинки r сантим., вес q грамм., один куб. сантим. вещества, из которого сделана пластинка, весит d граммов. Найти формулу для вычисления ее толщины h. Найти числовую величину h, зная r=5,0 см.; p=23,3 гр.; d=7,2 гр.

271. Чтобы найти площадь сечения капиллярной стеклянной трубки, т.-е. трубки с очень узким каналом, в нее был введен столбик ртути, длина которого и вес были измерены: длина его 14,7 см., а вес 6,35 грамм. Вычислить площадь сечения трубки, если известно, что один куб. сантиметр ртути весит 13,6 грамм.

272. Вычислить объем и вес свинца трубки, внутренний диаметр которой 1,2 см., наружный 2,0 см.; длина же трубки, 10 см. Вес одного куб. сантим. свинца 11,4 грамм.

273. а) Два цилиндра имеют радиусы оснований равные 5 см.; высота же одного цилиндра 10 см., а другого 20 см. Во сколько раз объем второго цилиндра больше объема первого.

б) Два цилиндра имеют высоты равные 10 см. Радиус же одного 5 сантим., а другого 15 сант. Во сколько раз объем второго цилиндра больше объема первого?

в) Радиусы и высоты цилиндров следующие:

радиус	высота
1 см.	3 см.
2 см.	6 см.
3 см.	9 см.
5 см.	15 см.

Во сколько раз радиус и высота второго цилиндра больше радиуса и высоты первого? Во сколько раз объем второго цилиндра больше объема первого?

Во сколько раз радиус и высота третьего цилиндра больше радиуса и высоты первого цилиндра? Во сколько раз объем третьего цилиндра больше объема первого цилиндра? и т. д.

274. Прямоугольник, имеющий стороны 1 см. и 2 см., вращается сперва вокруг короткой стороны, а затем вокруг длинной. Вычислить отношение объемов тел, получающихся при этих вращениях.

275. Прямоугольник, имеющий стороны a и b, вращается сперва вокруг одной стороны, затем вокруг другой. Вычислить отношение объемов цилиндров, полученных при вращении этого прямоугольника. Подставить в полученную формулу $a=3$ см. $b=6$ см.

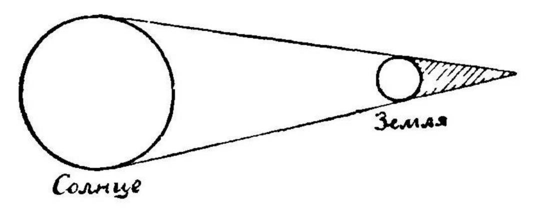
276. Мастер имеет прямоугольный кусок жести, длина которого 16 дюйм., а ширина 8 дюйм. Из него он может сделать боковую поверхность цилиндрического сосуда, сгибая длинные стороны этого куска или короткие. В каком случае получится вместимость сосуда больше—в первом или во втором и во сколько раз?

25. Прямой конус.

Описание. 1. Куча зерна имеет коническую форму, форму конуса. Умея вычислить объем конуса, можем узнать, сколько мер зерна в куче, не измеряя его мерой, и сколько весит зерно, не взвешивая его.

Земля всегда с какой-либо стороны освещена солнцем; с другой же находится конус тени (черт. 119).

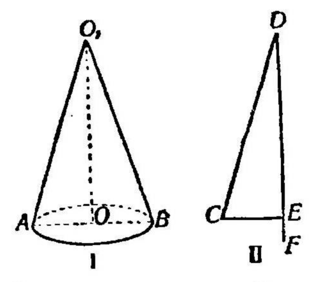
Ученые астрономы хорошо изучили этот конус и умеют секунда в секунду предсказать, когда луна спрячется в этом конусе и наступит ее затмение.



Черт. 119.

Многие части машин, в особенности сверлящие, имеют коническую форму.

2. На чертеже 120, I изображен конус. Его основание — круг. Боковая поверхность — кривая поверхность. Чтобы уяснить себе форму конуса, сделаем из проволоки прямоугольный треугольник ECD (черт. 120). Будем его вращать за кончик EF вокруг катета DE. Он опишет тело, которое называется конусом. Гипотенуза же CD образует кривую поверхность, называемую конической. Прямая DE будет осью и высотой конуса.



Черт. 120. I—конус. Этот конус может быть образован вращением прямоугольного треугольника II.

Задачи. 277. Взять точку на поверхности конуса и провести чрез нее на этой поверхности прямую линию. Сколько прямых линий можно провести на поверхности конуса чрез эту точку? чрез вершину конуса?

278. Вылепить из глины несколько конусов! Рассечь конус так, чтобы сечение было перпендикулярно оси! проходило чрез ось! было параллельно оси! было параллельно образующей конуса, т.е. прямой, лежащей на его поверхности! наклонно к оси и непараллельно образующей! В первом случае на поверхности конуса получим окружность, во втором—две прямые линии, в прочих случаях иные кривые линии.

Поверхность конуса. 1. Разрезав боковую поверхность конуса по прямой линии O_1A (черт. 120), развернем ее. На черт. 121 изображена развертка поверхности конуса. Фигура $AOBDA$ представляет собой часть круга; радиус

OA у развертки и прямая O_1A у конуса (черт. 120)— одна и та же линия: дуга ADB—разомкнутая окружность основания конуса. Вычислим площадь боковой поверхности конуса $AOBDA$. Пусть отрезок OA равен 10 см.; радиус основания конуса $DC=4$ см.

Длина окружности C очевидно равна длине дуги ADB.

Какую часть окружности, описанной радиусом OA, составляет дуга ADB?

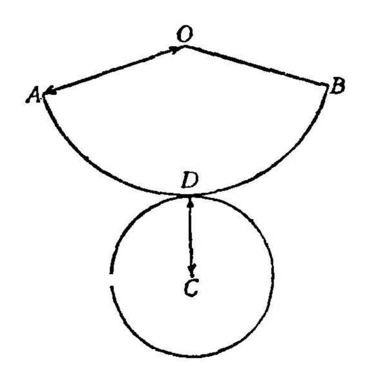
Длина окружности O равна произведению

$$10 \cdot 6{,}28.$$

Длина дуги ADB равна произведению

$$4 \cdot 6{,}28,$$

так как длины дуги ADB и окружности C равны.



Черт. 121. Развертка поверхности конуса.

Очевидно, боковая поверхность $AOBDA$ конуса составляет такую же часть целого круга O, какую дуга ADB составляет всей его окружности O. Эту часть мы найдем:

$$(4 \cdot 6{,}28):(10 \cdot 6{,}28)=0{,}4.$$

Значит боковая поверхность конуса составляет 0,4 площади круга O, которая равна $3{,}14 \cdot 10^2$. Взяв 0,4 произведения $3{,}14 \cdot 10^2$, найдем площадь $AOBDA$:

$$3{,}14 \cdot 100 \cdot 0{,}4=125{,}6 \text{ (кв. см.)}.$$

Прибавив сюда площадь круга C, равную $3{,}14 \cdot 4^2$, найдем полную поверхность конуса:

$$3{,}14 \cdot 10^2 \cdot 0{,}4+3{,}14 \cdot 4^2=125{,}6+50{,}24=175{,}84 \text{ кв. см.}$$

2. Обозначим OA через a и DC через r. Длина окружности O будет

$$6{,}28 \cdot a;$$

длина дуги ADB равна длине окружности C,

$$6{,}28 \cdot r.$$

Какую часть дуга ADB составляет от всей окружности O?

$$\frac{6{,}28 \cdot r}{6{,}28 \cdot a} = \frac{r}{a}.$$

Площадь круга O равна

$$3{,}14 \cdot a^2.$$

Чтобы узнать площадь $AOBDA$, надо взять часть $\frac{r}{a}$ произведения $3{,}14 \cdot a^2$:

$$\frac{3{,}14 \cdot a \cdot a \cdot r}{a} = 3{,}14 \cdot r \cdot a.$$

Это и есть формула для вычисления боковой поверхности конуса. Полная поверхность его:

$$3{,}14 \cdot r \cdot a + 3{,}14 \cdot r^2.$$

Задачи. 279. Вычислить боковую и полную поверхность конуса по формулам, напечатанным выше, когда

$r = 10$ см., $a = 15$ см.
$r = 2{,}5$ м., $a = 3{,}2$ м.

280. Сделать развертку конуса, радиус основания которого 8 см. и образующая 15 см. (образующая—прямая O_1A на черт. 120).

Указание. Описав круг радиусом 15 см., взять $\frac{8}{15}$ его.

Объем конуса. 1. Подобно тому, как объем пирамиды равен одной трети объема призмы, имеющей с нею равные основания и высоты, так и объем конуса равен одной трети объема цилиндра, имеющего с ним равные основания и равные высоты.

Воспользуемся моделями цилиндра и конуса, сделанными из жести, чтобы на опыте сравнить объемы конуса и цилиндра. Если таковых нет, то можно изготовить их из обложечной бумаги, пропитав их затем горячим воском или парафином. Цилиндр и конус имеют

равные основания и высоты. Наполнив конус водой, перельем ее в цилиндр. Сделав так всего трижды, мы наполним цилиндр водою.

Задачи. 281. Вычислить объем конуса, радиус основания которого 10 см. и высота также 10 см.

282. Взяв воронку, залепить ее отверстие воском или хлебом. Сделать необходимые измерения и вычислить ее вместимость. Наполнить воронку водой и затем вместимость ее измерить мензуркой. Сравнить оба результата.

2. Пусть радиус основания конуса равен r, высота конуса h. Тогда объем его v выразится

$$v = \frac{3.14 \cdot r^2 \cdot h}{3}.$$

Задачи. 283. Вычислить вес конической кучи ржи, зная, что высота ее 3,2 фут., окружность основания 31 фут. Четверик равен 0,92 куб. фут. Четверик ржи весит 45 фунтов.

284. Насыпав коническую кучу песку, измерить окружность ее и высоту и вычислить вес, зная, что вес 1 куб. десим. песку равен 1,65 килогр.

285. Вычислить объем конуса, если радиус основания его $r = 6$ см. и высота $h = 8,5$ см.! $r = 2,1$ см. и $h = 4$ см.!

286. Обозначив длину окружности конуса через l, его высоту через h, вывести формулу для вычисления объема.

Вычислить по этой формуле объем конуса, приняв $l = 34,54$ см. и $h = 10,0$ см.

287. Объем шара равен объему конуса, основанием которого служит такой круг, площадь которого равна площади поверхности шара, а высотой радиус шара.

Вычислить объем шара, радиус которого 1 см.! 10 см.! 100 см.! 2,5 см.!

Выразить объем шара формулой!

288. Даны три тела — цилиндр, шар и конус. Диаметры их равны 10 см., высоты цилиндра и конуса равны также 10 см.

Вычислить объемы этих тел.

Вычислить отношение объемов цилиндра и конуса, шара и конуса. Сравнить сумму объемов шара и конуса с объемом цилиндра.

Обозначив диаметры и высоты тех же тел через d, написать объем каждого из них. Вывести отсюда отношения объемов этих тел.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ГЛАВА I.

Треугольник. Равенство и подобие треугольников

ГЛАВА II.

Четыреугольники

ГЛАВА III.

Многоугольники.

ГЛАВА IV.

Объемы многогранников.

ГЛАВА V.

Круг. Цилиндр. Конус.